



UNIUNEA EUROPEANĂ



GUVERNUL ROMÂNIEI
MINISTERUL MUNCII, FAMILIEI,
PROTECȚIEI SOCIALE ȘI
PERSOANELOR VÂRSTNICE
AMPOSDRU



Fondul Social European
POSDRU 2007-2013



Instrumente Structurale
2007-2013



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE
OIPOSDRU



Universitatea
POLITEHNICA
din București

FONDUL SOCIAL EUROPEAN

Investește în oameni!

Programul Operațional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 – 2013

Proiect POSDRU/107/1.5/S/76813 – Burse doctorale: investiții în cercetare-inovare-dezvoltare pentru viitor (DocInvest)



UNIVERSITATEA „EFTIMIE MURGU” din REȘIȚA

Facultatea de Mecanică și Ingineria Materialelor

Departamentul de Mecanică

Nr. Decizie 692 din 10.09.2013

TEZĂ DE DOCTORAT

Identificarea defectelor în plăci elastice subțiri prin analiză modală

Identification of defects in thin elastic plates by means of modal analysis

Autor: Cornel HAȚIEGAN

COMISIA DE DOCTORAT

Președinte	Prof.univ.dr.ing. Doina FRUNZĂVERDE	de la	Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița
Conducător de doctorat	Prof.univ.dr.ing. Gilbert-Rainer GILLICH	de la	Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița
Referent	Prof.univ.dr.ing. Polidor BRATU	de la	Universitatea „Dunărea de Jos” din Galați
Referent	Prof.univ.dr.ing. Garabet KÜMBETLIAN	de la	Academia de Științe Tehnice din România
Referent	Prof.univ.dr.ing. Ioan MAGHEȚI	de la	Universitatea „Politehnica” din București

Reșița 25.09.2013



UNIVERSITATEA "EFTIMIE MURGU" DIN REȘIȚA

FACULTATEA DE MECANICĂ ȘI INGINERIA MATERIALELOR

**IDENTIFICAREA DEFECTELOR ÎN PLĂCI
ELASTICE SUBȚIRI PRIN ANALIZĂ
MODALĂ**

**IDENTIFICATION OF DEFECTS IN THIN
ELASTIC PLATES BY MEANS OF MODAL
ANALYSIS**

Conducător de doctorat:

Prof. univ. dr. ing. Gilbert-Rainer GILLICH

Doctorand :

Fiz. Cornel HAȚIEGAN

Cuvânt înainte

Teza de doctorat își propune să lărgescă sfera cunoștințelor legate de detectarea defectelor, extinzând cercetările efectuate la Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița la structuri de tipul plăcilor elastice subțiri. Cercetările au avut un grad de complexitate ridicat, fiind implicate metode analitice, numerice și determinări experimentale; pentru efectuarea acestora am avut un suport științific și logistic deosebit din partea conducerii academice a Universității „Eftimie Murgu” din Reșița, a cadrelor didactice și a colegilor, pentru care le adresez sincere mulțumiri.

Pentru îndrumarea profesională și competența științifică primite pe parcursul stagiului doctoral, aduc mulțumirile, recunoștința și respectul meu conducătorului științific, domnului prof.univ.dr.ing. Gilbert-Rainer GILLICH.

Mulțumesc domnilor profesori: prof.univ.dr.ing. Polidor BRATU, prof.univ.dr.ing. Garabet KÜMBETLIAN și prof.univ.dr. Ioan MAGHEȚI, care, în calitate de referenți, prin sugestiile și observațiile competente au dus la îmbunătățirea substanțială a conținutului acestei teze de doctorat.

Cu deosebită recunoștință, vreau să mulțumesc pentru colaborarea și sprijinul acordat în realizarea analizelor numerice domnului ș.l.dr.ing. Ovidiu Vasile de la Universitatea Politehnica din București, domnului conf.univ.dr.mat. Romeo Negrea și doamnei ș.l.dr.fiz. Nicolina Pop de la Universitatea Politehnica din Timișoara, domnului ș.l.dr.ing. Vasile Iancu și domnului dr.ing. Marius Tufoi de la Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița.

Datorez mulțumiri speciale familiei mele pentru răbdarea, înțelegerea și susținerea morală manifestată pe toată perioada stagiului doctoral, mulțumiri tuturor celor care, în diferite momente și prin diferite modalități, m-au îndrumat, sprijinit și susținut pe parcursul elaborării tezei.

Prezenta lucrare de doctorat este rezultatul cercetărilor realizate în cadrul proiectului POSDRU ID 76813, Burse doctorale: investiții în cercetare-inovare-dezvoltare pentru viitor (DocInvest), Beneficiar Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița, cofinanțat din Fondul Social European – Investește în Oameni, prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013.

CUPRINS

CUPRINS.....	3
LISTĂ TABELE.....	5
LISTĂ FIGURI.....	10
LISTĂ NOTAȚII.....	15
INTRODUCERE	17
CAP. I STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRIILOR PRIVIND EVIDENȚIEREA ȘI EVALUAREA DEFECTELOR ÎN PLĂCI SUBȚIRI RECTANGULARE.....	22
1.1 Problematika detectării defectelor în structuri de rezistență	22
1.2 Analiza literaturii de specialitate privind metodele actuale de detectare a defectelor în plăci.....	24
1.3 Teoria plăcilor subțiri.....	29
1.4 Parametrii definitori ai comportamentului dinamic al plăcilor.....	33
1.5 Concluzii	36
CAP. 2 ANALIZA PARAMETRICĂ A COMPORTAMENTULUI DINAMIC ÎN CAZUL PLĂCILOR SUBȚIRI FĂRĂ DEFECT.....	37
2.1 Introducere	37
2.2 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa simplu rezemată pe toate laturile.....	38
2.3 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa simplu rezemată pe două laturi opuse și încastrată pe celelalte două laturi.....	45
2.4 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa simplu rezemată pe două laturi opuse și liberă pe celelalte două laturi	52
2.5 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile.	58
2.6 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa încastrată pe două laturi opuse și liberă pe celelalte două laturi.....	67
2.7 Concluzii	74
CAP. 3 ANALIZA PARAMETRICĂ A COMPORTAMENTULUI DINAMIC ÎN CAZUL PLĂCILOR SUBȚIRI CU DEFECT.....	75
3.1 Modelare prin metoda elementelor finite.....	75
3.2 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile fără defecte	76
3.2.1 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile fără defecte încastrate pe toate laturile..	81
3.2.2 Analiza rezultatelor obținute pentru placa fără defecte încastrată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi.....	89
3.2.3 Analiza rezultatelor obținute pentru placa fără defecte simplu rezemată pe toate laturile	94
3.2.4 Analiza rezultatelor obținute pentru placa fără defecte simplu rezemată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi.....	100
3.2.5 Analiza rezultatelor obținute pentru placa fără defecte încastrată pe două laturi paralele și simplu rezemată pe celelalte două laturi.....	106
3.3. Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile cu defecte încastrate pe toate laturile	112

3.3.1 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile încastrate pe toate laturile cu defect central longitudinal	114
3.3.2 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile încastrate pe toate laturile cu defect central transversal	121
3.3.3 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile încastrate pe toate laturile cu defect lateral	130
3.4 Concluzii	138
CAP 4. ANALIZA EXPERIMENTALĂ A COMPORTAMENTULUI DINAMIC AL PLĂCILOR SUBȚIRI	139
4.1 Încercări inițiale pentru determinarea săgeților statice în cazul plăcilor subțiri	139
4.2 PREZENTAREA STANDULUI EXPERIMENTAL – încercări dinamice	141
4.3 Rezultate experimentale în cazul plăcilor fără defect	145
4.3.1 Rezultatele experimentale în cazul plăcilor încastrate pe două laturi și libere pe celelalte două laturi (ÎÎ - LL)	145
4.3.2 Rezultatele experimentale în cazul plăcilor încastrate pe toate laturile (ÎÎ - ÎÎ)	152
4.4 Rezultate experimentale în cazul plăcilor cu defect	158
4.4.1 Rezultatele experimentale în cazul plăcilor încastrate pe toate laturile cu defect central	159
4.4.2. Rezultatele experimentale în cazul plăcilor încastrate pe toate laturile cu defect lateral	165
4.6 Concluzii parțiale – analiza experimentală	173
CAPITOLUL 5. CONCLUZII, CONTRIBUȚII PERSONALE	174
5.1 Concluzii finale	174
5.2 Contribuții proprii	175
5.3 Diseminarea rezultatelor	175
BIBLIOGRAFIE	178

LISTĂ TABELE

Nr.	Tabel	Pag.
1.1.	Caracteristicile mecanice și fizice ale plăcilor	33
1.2.	Caracteristicile geometrice ale plăcilor	33
1.3.	Tipuri de rezemare a plăcilor	39
2.1.	Frecvențele obținute prin calcul analitic	42
2.2.	Frecvențele obținute prin calcul analitic	48
2.3.	Frecvențele obținute prin calcul analitic	55
2.4.	Frecvențele obținute prin calcul analitic	64
2.5.	Frecvențele obținute prin calcul analitic pentru cazul ÎÎ – LL	71
3.1.	Proprietățile de material pentru oțelul AISI 1045	77
3.2.	Dimensiunile plăcilor studiate	77
3.3.	Informații de discretizare	81
3.4.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=1$ și $n=1...10$	83
3.5.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile pentru modurile $m=2$ și $n=1...9$	84
3.6.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=3$ și $n=1...7$	84
3.7.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=4$ și $n=1...4$	84
3.8.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=1$ și $n=1...10$	90
3.9.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=2$ și $n=1...9$	91
3.10.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=3$ și $n=1...7$	91
3.11.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=4$ și $n=1...4$	91
3.12.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=1$ și $n=1...10$	96
3.13.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=2$ și $n=1...7$	96
3.14.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=2$ și $n=1...9$	97
3.15.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=4$ și $n=1...4$	97
3.16.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=1$ și $n=1...10$	102

3.17.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=4$ și $n=1\dots4$	102
3.18.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=2$ și $n=1\dots9$	103
3.19.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=3$ și $n=1\dots7$	103
3.20.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=1$ și $n=1\dots10$	108
3.21.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=4$ și $n=1\dots4$	108
3.22.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=2$ și $n=1\dots9$	109
3.23.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=3$ și $n=1\dots7$	109
3.24.	Informații de discretizare pentru plăcile cu defect	114
3.25.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1\dots10$	116
3.26.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1\dots9$	116
3.27.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1\dots7$	117
3.28.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1\dots4$	117
3.29.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central longitudinal pentru $m=1$ și $n=1\dots10$	117
3.30.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1\dots9$	118
3.31.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1\dots7$	118
3.32.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1\dots4$	118
3.33.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1\dots10$	124
3.34.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1\dots4$	124
3.35.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1\dots9$	125
3.36.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1\dots7$	125
3.37.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1\dots10$	126
3.38.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1\dots9$	126

3.39.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1...7$	127
3.40.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1...4$	127
3.41.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1...10$	132
3.42.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1...4$	132
3.43.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1...7$	132
3.44.	Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1...9$	133
3.45.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1...10$	133
3.46.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1...9$	134
3.47.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1...7$	134
3.48.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1...4$	134
4.1.	Valorile săgeților în funcție de masă	140
4.2.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=1$ și $n=1...10$	146
4.3.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=2$ și $n=1...9$	146
4.4.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=3$ și $n=1...7$	147
4.5.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=4$ și $n=1...4$	147
4.6.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=1$ și $n=1...10$	147
4.7.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=2$ și $n=1...9$	148
4.8.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=3$ și $n=1...7$	148
4.9.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=4$ și $n=1...4$	148
4.10.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile fără defect pentru $m=1$ și $n=1...10$	153

4.11.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile fără defect pentru $m=2$ și $n=1...9$	153
4.12.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile fără defect pentru $m=3$ și $n=1...7$	154
4.13.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile fără defect pentru $m=4$ și $n=1...4$	154
4.14.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=1$ și $n=1...10$	154
4.15.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=2$ și $n=1...9$	155
4.16.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=3$ și $n=1...7$	155
4.17.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=4$ și $n=1...4$	155
4.18.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=1$ și $n=1...10$	160
4.19.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=2$ și $n=1...9$	160
4.20.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=3$ și $n=1...7$	161
4.21.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=4$ și $n=1...4$	161
4.22.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=1$ și $n=1...10$	161
4.23.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=2$ și $n=1...9$	162
4.24.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=3$ și $n=1...7$	162
4.25.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=4$ și $n=1...4$	162
4.26.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=1$ și $n=1...10$	166
4.27.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=2$ și $n=1...9$	167
4.28.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=3$ și $n=1...9$	167
4.29.	Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=4$ și $n=1...4$	167

4.30	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=1$ și $n=1\ldots 10$	168
4.31.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=2$ și $n=1\ldots 9$	168
4.32.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=3$ și $n=1\ldots 7$	169
4.33.	Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=4$ și $n=1\ldots 4$	169

LISTĂ FIGURI

Nr.	Figura	Pag.
1.1.	Moduri de prindere a plăcilor	35
2.1.	Formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe toate laturile	43
2.2.	Compararea formelor proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lungime) și încastrată pe celelalte două laturi (lățime)	49
2.3.	Formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lungime) și încastrată pe celelalte două laturi (lățime)	50
2.4.	Formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lățime) și liberă pe celelalte două laturi (lungime)	56
2.5.	Forma proprie pentru Modul 2, pentru cele două relații deduse	64
2.6.	Formele proprii de vibrație pentru placa încastrată pe toate laturile	65
2.7.	Formele proprii de vibrație pentru placa încastrată pe două laturi paralele (lățime) și liberă pe celelalte două laturi (lungime)	72
3.1.	Selectarea materialului din baza de date SolidWorks	77
3.2.	Aplicarea constrângerilor pentru modelul de placă studiat	78
3.3.	Tipuri de rezemare a plăcilor studiate (continuare)	80
3.4.	Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare încastrat-încastrat	81
3.5.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	85
3.6.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	85
3.7.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	86
3.8.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	86
3.9.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	86
3.10.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	87
3.11.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	87
3.12.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	87
3.13.	Forma proprie pentru Modul 2, pentru FEM	88
3.14.	Starea deformată a plăcii în secțiune prin FEM	88
3.15.	Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare încastrat-liber	90
3.16.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	92
3.17.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	92

3.18.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	92
3.19.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	93
3.20.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	93
3.21.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	93
3.22.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	94
3.23.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	94
3.34.	Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare simplu rezemat – simplu rezemat	95
3.25.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	98
3.26.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	98
3.27.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	98
3.28.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	99
3.29.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	99
3.30.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	99
3.31.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	100
3.32.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	100
3.33.	Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare rezemat-liber	101
3.34.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	103
3.35.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	104
3.36.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	104
3.37.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	104
3.38.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	105
3.39.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	105
3.40.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	105
3.41.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	106
3.42.	Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare încastrat-simplu rezemat	106
3.43.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	109
3.44.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	110
3.45.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	110
3.46.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	110
3.47.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	111
3.48.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	111
3.49.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	111

3.50.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	112
3.51.	Tipuri de rezemare pentru placa cu defect central sau lateral	113
3.52.	Exemple de moduri de vibrație pentru placa cu defect central 50×50 mm	115
3.53.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	119
3.54.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	119
3.55.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	119
3.56.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	120
3.57.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	120
3.58.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	120
3.59.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	121
3.60.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	121
3.61.	Exemple de moduri de vibrație pentru placa cu defect central 50x50 mm	122
3.62.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	127
3.63.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	128
3.64.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	128
3.65.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	128
3.66.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	129
3.67.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	129
3.68.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	129
3.69.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	130
3.70.	Exemple de moduri de vibrație pentru placa cu defect central 50x50 mm	131
3.71.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	135
3.72.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	135
3.73.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	135
3.74.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	136
3.75.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	136

3.76.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	136
3.77.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	137
3.78.	Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	137
4.1.	Standul experimental pentru determinarea săgeților	139
4.2.	Variația săgeților în funcție de masă	140
4.3.	Accelerometru triaxial tip 4506-B-003	141
4.4.	Placa de achiziție NI9233 a și Hy Speed USB Carrier b	142
4.5.	Stand experimental, în situația plăcii încastrate pe toate laturile	143
4.6.	Panoul frontal	144
4.7.	Standul experimental pentru placa ÎÎ-LL	145
4.8.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	149
4.9.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	149
4.10.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	150
4.11.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	150
4.12.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	150
4.13.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 9$	151
4.14.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	151
4.15.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	151
4.16.	Standul experimental pentru placa ÎÎ-ÎÎ	152
4.17.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	156
4.18.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	156
4.19.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	156
4.20.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	157
4.21.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	157
4.22.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 9$	157
4.23.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 7$	158
4.24.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	158
4.25.	Standul experimental pentru placa ÎÎ-ÎÎ, cu defect central de $4,9\times 101,6$	129
4.26.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	163
4.27.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	163
4.28.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	163
4.29.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	164

4.30.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	164
4.31.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 9$	164
4.32.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 7$	165
4.33.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	165
4.34.	Standul experimental pentru placa ÎÎ-ÎÎ, cu defect central de $5,8\times 77,5$ mm	166
4.35.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	170
4.36.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	170
4.37.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	170
4.38.	Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	171
4.39.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$	171
4.40.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$	171
4.41.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$	172
4.42.	Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$	172

LISTĂ NOTAȚII

A	aria suprafeței
a, b	dimensiunile plăcii
A_m, B_m, C_m, D_m	constante
E	modulul de elasticitate longitudinal
f_A	frecvența proprie determinată analitic
f_{FEM}	frecvența proprie determinată prin FEM
f_{mn}	frecvența
FEM	metoda elementului finit
G	modulul de elasticitate transversal
h	grosimea plăcii
i	numărul complex
$\hat{\Gamma}$	încăstrată pe două laturi paralele
$\hat{\Gamma}-\hat{\Gamma}$	încăstrată pe toate laturile
$\hat{\Gamma}-LL$	încăstrată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi
L	lungimea plăcii
l	lățimea plăcii
LL	liber pe două laturi paralele
m, n	numărul de moduri
Mathcad	pachet de soft pentru simulări științifice
Matlab	pachet de soft pentru simulări științifice
MRPT	Mobile Robot Programming Toolkit
P_0	forța perturbatoare
r	raza cercului
$r_1, \dots, r_8$	rădăcinile ecuației caracteristice
$\sin, \cos$	funcții trigonometrice
$\sinh, \cosh$	funcții hiperbolice
SolidWorks	pachet de soft pentru modelare și simulare științifică
SR	simplu rezemat pe două laturi paralele
SR- $\hat{\Gamma}$	simplu rezemată pe două laturi paralele și încăstrată pe celelalte două laturi
SR-LL	simplu rezemată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi

SR-SR	simplic rezemat pe toate laturile
$W_{mn}(x,y)$	scuația de mișcare
$Z_{mn}(x,y)$	formele proprii ale mișcării
ν	constanta lui Poisson
ρ	densitatea plăcii
$\Delta\Delta$	operatorul biarmonic
ω_{mn}	pulsația
ϑ_{mn}	faza inițială
α_m, β_m	soluțiile ecuației caracteristice
λ	legătura dintre pulsația proprie și soluția ecuației caracteristice
λ_i, λ_j	rădăcinile ecuației barelor
ε	eroarea sau abaterea procentuală
$\{\delta\omega\}$	schimbarea rigidității fiecărui element din placă
$\{\delta k\}$	transformările în frecvența naturală a plăcii

INTRODUCERE

Lucrările de cercetare efectuate, având ca finalitate elaborarea tezei de doctorat intitulate: „IDENTIFICAREA DEFECTELOR ÎN PLĂCI ELASTICE SUBȚIRI PRIN ANALIZĂ MODALĂ”, se încadrează într-un domeniu de interes major privind comportarea la vibrații a structurilor mecanice. Informațiile conținute în semnalele de vibrații pentru evaluarea severității și a poziției defectelor pot fi utilizate în detectarea timpurie a defectelor structurilor de rezistență, permițând întreținerea programată a acestora, cu impact asupra reducerii costurilor de exploatare, sau repunerea lor în funcțiune și înlocuirea structurii, pentru a evita defecțiuni și accidente. Teza urmărește completarea și aprofundarea cunoștințelor legate de vibrațiile libere în plăci elastice subțiri cu diferite forme ale defectului, pentru un număr mare de tipologii de plăci subțiri. Prin urmare, în cadrul temei au fost studiate modificările frecvențelor proprii ale plăcilor elastice subțiri cu defecte având poziția și forma cunoscute, pentru un număr semnificativ de moduri de vibrație, înainte și după apariția defectelor, precum și posibilitatea de evaluare a severității acestora utilizând informații specializate.

Oportunitatea cercetărilor efectuate a avut ca punct de plecare necesitatea evaluării poziției și severității defectului în timp real, monitorizarea propagării acestuia în plăci, în vederea reducerii costurilor de exploatare cu mentenanța și înlocuirea sau remedierea structurilor deteriorate după caz. În prezenta teză a fost propusă o metodă dinamică modală de analiză și identificare a defectului, avantajul major fiind faptul că nu necesită acces la zona afectată.

În esență, defectul într-o structură reprezintă o abatere a proprietăților structurii materialului sau a geometriei sale, care schimbă comportamentul modal prin vibrații ce produc deplasări și tensiuni ce modifică anumite caracteristici mecanice și dinamice. Astfel, parametrii monitorizați sunt: frecvențele naturale, forma modală, rigiditatea sau flexibilitatea, gradul de amortizare. Identificarea defectelor poate fi realizată, de asemenea, printr-un algoritm. În acest caz, capacitatea algoritmului de detectare a defectului, de aplicabilitate practică, de repetare a experimentului pentru verificarea rezultatelor, de extrapolare a caracteristicii și reprezentare grafică se poate utiliza în mod optim prin analiza dinamică a plăcilor.

Prin monitorizarea integrității structurilor se poate stabili starea în care se găsește structura, astfel încât la apariția defectelor să poată fi luate decizii cu privire la necesitatea

remedierii acestora. Această activitate prezintă un interes crescând în ultimii ani, cercetările actuale fiind orientate pe evidențierea celor mai concludenți parametri măsurabili și integrarea rezultatelor măsurărilor în algoritmi capabili să semnaleze apariția defectului, respectiv gradul de deteriorare a structurilor.

În acest sens, rezultatele cercetărilor efectuate pe structuri elastice privind alegerea modelelor teoretice optime în funcție de geometria și modul de rezemare a plăcilor, evaluarea severității defectelor utilizând frecvențele și modurile proprii au avut ca obiectiv central stabilirea unei metodologii originale ce se bazează pe un procedeu experimental precis și sigur, ce utilizează un sistem informatic și instrumental cu dotare tehnică minimală, aplicabil la orice tip de placă elastică subțire.

Obiectivele urmărite în prezenta teză de doctorat sunt următoarele:

- analiza stadiului actual al problematicei pe baza unei documentări ample, specializate și bogate, astfel încât să poată fi evidențiat în mod critic stadiul cercetărilor în domeniu. În acest context au fost parcurse, selectate și studiate următoarele categorii de documente bibliografice: documentații de referință cu caracter de reglementare, articole sau rezultate ale cercetărilor publicate, capitole speciale sau de specialitate din cărți publicate de edituri cunoscute. În esență, au putut fi localizate printr-o individualizare adecvată metodele existente referitoare la identificarea defectelor pe baza vibrațiilor libere, analiza sensibilității, gradul de credibilitate a rezultatelor experimentale, nivelul de apreciere a riscului pentru plăci elastice subțiri având diverse geometrii și multiple configurații de rezemare;

- stabilirea modelului analitic adecvat pentru determinarea frecvențelor proprii și formelor proprii ale plăcilor elastice subțiri dreptunghiulare, pentru sisteme de rezemare pe contur reale;

- fundamentarea metodei de analiză modală utilizând metoda elementelor finite pentru plăci elastice subțiri dreptunghiulare fără defecte și cu defecte identificabile. În mod special, se propune ca element de verificare metoda corelării rezultatelor inițiale pentru plăcile fără defecte. De asemenea, metoda de analiză modală ține seama de modificările semnificative asupra comportamentului dinamic modal al plăcii, precum și de realizarea unei simulări parametrice în funcție de forma defectului și poziția acestuia în oricare punct geometric al plăcii;

- conceperea, stabilirea și fundamentarea metodei de analiză modală pentru plăcile elastice subțiri cu defecte atât pe baza testării numerice, cât și pe baza înregistrărilor semnalelor de vibrații la impulsuri inițiale aplicate din exterior plăcii. În acest caz, evaluarea comportării modale are la bază configurația geometrică, sistemul de condiții pe contur și

elasticitatea plăcilor subțiri, fapt ce asigură o bună corelare între rezultatele măsurabile ale analizei modale și varietatea defectelor structurale ale plăcilor;

- elaborarea unei metode de analiză care să permită evaluarea severității defectelor de diferite forme geometrice în elemente structurale de tip placă elastică subțire dreptunghiulară;

- stabilirea unei metode instrumentale și informatice pentru evidențierea, măsurarea și prelucrarea rezultatelor privind frecvențele proprii ale plăcilor elastice subțiri fără defecte și cu defecte, astfel încât să poată fi decisă categoria de siguranță a plăci;

- diseminarea rezultatelor științifice teoretice și practice ale cercetărilor pe categorii de domenii de interes în rândul specialiștilor, astfel încât rezultatele să fie transmise și valorificate pe niveluri de competență și grad de aplicare practică în inginerie.

În cadrul cercetărilor prezentate în această teză au fost stabilite **ipoteze de lucru** care nu afectează în mod semnificativ rezultatele obținute, și anume:

- placa este de formă dreptunghiulară având grosimea mult mai mică decât lungimea și lățimea plăcii;

- defectul considerat este de tip străpuns, având adâncimea egală cu grosimea plăcii;

- fețele laterale ale defectului sunt paralele și poziționate perpendicular pe planul median al plăcii, în poziția de echilibru, și rămân perpendiculare pe aceasta în timpul vibrației;

- reducerea secțiunii transversale datorită defectelor are influență semnificativă asupra comportamentului dinamic al plăcii;

- pierderea de masă datorită defectelor se neglijează, și efectul asupra comportamentului dinamic al plăcii este considerat nesemnificativ.

- placa și materialul din care este realizată aceasta asigură condiții de continuitate, omogenitate și izotropie;

- pentru încărcări moderate placa se comportă elastic, fiind valabilă legea lui Hooke;

- deformațiile sunt mici și pot fi neglijate în raport cu unitatea;

- deformațiile liniare și de lunecare în planul median al plăcii sunt de asemenea neglijabile.

Pentru a răspunde obiectivelor propuse, teza este structurată pe cinci capitole, pornind de la modelele și teoriile actuale prezentate în literatura de specialitate, continuând cu abordări teoretice privind comportarea plăcilor subțiri fără și cu defecte, analiza modală utilizând metoda elementului finit, prezentarea metodei propuse de autor pentru evaluarea defectului când poziția, forma și dimensiunile lui sunt cunoscute. Conceptele dezvoltate sunt

validate prin experimente pe plăci elastice subțiri reale cu și fără defect, iar la final sunt prezentate concluzii și evidențiate contribuțiile personale.

Capitolul 1, „Stadiul actual al cercetărilor privind evidențierea și evaluarea defectelor în plăci subțiri rectangulare”, prezintă metodele și rezultatele obținute în acest domeniu al detectării și evaluării defectelor prin vibrații pe plăci elastice subțiri până la ora actuală. În literatura de specialitate există foarte multe lucrări care încearcă să rezolve problema detectării și evaluării defectelor prin vibrații pe plăci elastice subțiri. Toate metodele publicate și prezentate în această lucrare sunt aplicabile în general pentru anumite cazuri particulare de structuri pentru care au fost dezvoltate, în special în ceea ce privește rezemarea, poziția sau forma defectului; ele pot fi aplicate cu succes pe acest tip de structuri, fără a fi însă posibilă generalizarea.

În **Capitolul 2** al tezei sunt prezentate abordările teoretice privind comportarea plăcilor subțiri fără defecte cu diferite tipuri de rezemare. În primul paragraf sunt prezentate ipotezele care stau la baza studiului vibrațiilor libere în plăci elastice subțiri și ce condiții la limită trebuie impuse pentru determinarea frecvențelor și formelor proprii. S-au determinat analitic frecvențele și formele proprii pentru cinci cazuri de rezemare, iar rezultatele au fost prezentate tabelar pentru frecvențele proprii și grafic pentru formele proprii. Pentru placa încastrată pe două laturi paralele sau pe întreg conturul s-a introdus funcția „semn” pentru obținerea mai precisă a formelor proprii. În cazul liber-liber s-a obținut o relație identică cu relația de la bară pentru același tip de rezemare. Pentru descrierea mai exactă a formelor proprii s-a introdus o funcție de forma $Z_{mn}(x,z)=Z_m(x) \cdot Z_n(y)$, care utilizează pentru Z_i și Z_j relații echivalente cu cele utilizate la bare cu condiții similare de rezemare. La sfârșitul capitolului sunt prezentate concluziile, iar majoritatea lor nu apar în literatura de specialitate.

În **Capitolul 3** se determină, prin metoda elementului finit, modurile proprii și frecvențele proprii ale plăcilor fără defect cu diferite tipuri de rezemare, iar pentru plăcile încastrate pe toate laturile au fost determinate aceste caracteristici și pentru situația existenței diferitelor tipuri de defecte. Valorile frecvențelor proprii obținute sunt comparate cu cele determinate pe cale analitică; abaterile procentuale între rezultatele obținute prin cele două metode sunt redată tabelar și reprezentate grafic. Rezultatele sunt în bună concordanță și confirmă corectitudinea abordărilor analitice și prin analiză numerică modală. S-a evidențiat prin analiza cu element finit valabilitatea relației $Z_{mn}(x,z)=Z_m(x) \cdot Z_n(y)$, care utilizează pentru Z_m și Z_n relațiile echivalente cu cele utilizate la bare cu aceleași condiții de rezemare, obținându-se soluții mai exacte. Cercetările efectuate pe plăci încastrate pe contur, cu defecte într-o largă varietate de dimensiuni, poziții și orientare pe placă au relevat faptul că fiecare

defect are o „semnătură” proprie evidențiable prin modificarea relativă a frecvențelor pentru un număr rezonabil de moduri de vibrație.

În **Capitolul 4** se descrie standul și echipamentul folosit la măsurătorile de vibrații, special conceput pentru încercările experimentale destinate să valideze conceptele dezvoltate în capitolele anterioare, precum și rezultatele obținute experimental pe plăci subțiri reale fără defect, cu diferite tipologii de prindere. Sunt de asemenea prezentate și rezultatele obținute pentru placa încastrată pe contur, cu defecte de tip străpuns, de diferite dimensiuni geometrice, poziție și orientare. Pentru realizarea standului s-au stabilit soluții optime care să permită o achiziție cât mai precisă a semnalelor și s-a minimizat influențele perturbațiilor din exterior. În cazul încastrării, placa metalică a fost prinsă rigid cu ajutorul unei bride metalice perforate și cu strângere controlată, utilizând mai multe prinderi rigide „șurub-piuliță”. Achiziția semnalelor de la accelerometru s-a efectuat cu o placă de achiziție cu 4 canale, stocarea semnalelor s-a realizat cu ajutorul unui laptop și al unui modul de achiziție realizat cu programul LabVIEW, iar semnalele au fost analizate utilizând un software LabVIEW. Pentru validarea rezultatelor au fost analizate plăcile elastice subțiri încastrate pe contur fără defecte, respectiv cu diferite forme și dimensiuni ale defectului. Rezultatele măsurătorilor de frecvențe proprii în aceste cazuri sunt prezentate tabelar. S-a calculat abaterea relativă a frecvențelor și am comparat-o cu cele obținute analitic, respectiv prin analiză modală, și s-a constatat o bună corelare între acestea. La sfârșitul capitolului sunt prezentate concluziile.

În **Capitolul 5** sunt prezentate concluziile finale și contribuțiile personale, teoretice și experimentale, cuprinse în teza de doctorat, diseminarea rezultatelor, precum și direcțiile viitoare de cercetare.

CAP. 1 STADIUL ACTUAL AL CERCETĂRIILOR PRIVIND EVIDENȚIEREA ȘI EVALUAREA DEFECTELOR ÎN PLĂCI SUBȚIRI RECTANGULARE

1.1 Problematica detectării defectelor în structuri de rezistență

Defectele influențează comportamentul dinamic și static al structurilor, modificarea caracteristicilor mecanice și dinamice, cum ar fi [37,38,85]: frecvențele naturale, forma modală, rigiditatea sau flexibilitatea, gradul de amortizare.

Defectul este definit ca o schimbare apărută într-o structură, care afectează negativ performanțele sale. El poate fi, de asemenea, definit ca un fenomen în care are loc slăbirea structurii. Într-o altă manieră, ar putea fi considerat ca o abatere a proprietăților structurii materialului sau a geometriei sale, care produce vibrații nedorite, deplasări și tensiuni.

Studierea defectului este foarte importantă, de vreme ce o mare valoare din pierderea proprietății și duratei de viață poate fi prevenită prin identificarea defectului. Tendința de a folosi structuri chiar și după deteriorare, incapacitatea de a face renovări adecvate în timp util plasează studiarea defectului într-o poziție și mai importantă. Studiarea defectului poate ajuta specialiștii să găsească metode mai eficiente pentru monitorizarea sănătății structurii și chiar să prezică eventualele defecte. Au fost realizați numeroși algoritmi pentru detectarea defectului, dar mai rămân de testat numeroși factori până la realizarea unui model ideal. Din cauza limitelor aparatelor de măsură, a performanței senzorilor, a erorilor experimentale și a complexității structurilor, pot fi numite doar câteva metode eficiente de detectare a defectelor.

În ultimii ani au avut loc cercetări importante, pentru a se dezvolta tehnici performante de obținere a unor metode de evaluare nedistructivă, în vederea stabilirii defectului. La realizarea unui algoritm de detectare a defectului, trebuie respectate următoarele condiții:

- a) Capacitatea algoritmului de detectare a defectului rezultă din posibilitatea acestuia de a fi utilizat în condiții naturale și rezistență la zgomot:
 - utilitatea practică a unui astfel de algoritm de detecție a defectului presupune rezistența la perturbațiile provocate de sunet, lumină, vânt și vibrații;
 - filtrele utilizate la implementarea algoritmului nu trebuie să afecteze structura fizică a specimenului.

- b) Aplicabilitatea practică presupune că orice structură mare, supusă unui proces de divizare într-un experiment, trebuie divizată în părți, astfel încât să devină posibil de gestionat. O divizare excesivă va duce la durate de timp ce necesită un studiu de analiză nepracticabilă. Pe de altă parte, defectul fiind mic prin natura sa, ar trebuie să poată fi detectat cu o schemă în care posibilitatea zonei de defect să nu includă punctele de scanare care au fost luate în calculul anterior.
- c) Repetarea experimentului pentru verificarea rezultatelor. Datorită complexității condițiilor naturale, algoritmul de detectare trebuie să permită compararea rezultatelor experimentelor repetate, pentru a putea fi evaluate abaterile și/sau erorile.
- d) Extrapolarea caracteristicii și interfața grafică de utilizare. Rezultatele experimentelor ar trebui studiate și utilizate cu interfața grafică ajutătoare, care va determina defectul.

Inspecția periodică și controlul structurilor ingineresti sunt necesare din punctul de vedere al detectării defectelor în timp real, stabilirii siguranței și a fiabilității structurii. Identificarea timpurie a defectelor în timpul utilizării structurilor permite întreținerea programată a acestora, cu impact asupra reducerii costurilor de exploatare, sau repunerea lor în funcțiune și înlocuirea structurii, pentru a evita defecțiuni și accidente.

Dezvoltarea industriei aeronautice moderne, a domeniului mecanic și a industriei civile a generat un nou impuls pentru o analiză mai riguroasă a problemelor legate de vibrațiile plăcilor și detectarea defectelor în timp util. Orientarea recentă în dezvoltarea teoriei plăcilor și detectarea defectelor în aceste structuri de rezistență este caracterizată prin utilizarea computerelor performante, folosind metode numerice, incluzând metoda elementului finit, rezultatele comparându-le cu datele experimentale și cu diferite metode teoretice/analitice. În literatura de specialitate sunt tratate numeroase metode nedistructive de control, atât cele locale, cât și cele globale; aceste metode nu se exclud reciproc, ele pot fi utilizate complementar.

Tipuri de defecte [34,35,36]:

- defecte macroscopice: sunt defecte sau abateri dimensionale de formă și de suprafață;
- defecte microscopice: de structură internă, incluziuni metalice și nemetalice, pori, fisuri, segregatii, abateri de la compoziția chimică și gradul de puritate, discontinuități;
- defecte de funcționare.

Metode de control al defectelor:

- vizuale - pentru defecte macroscopice;

- cu instrumente și aparatură obișnuită - pentru determinarea uzurilor, fisurilor macroscopice, răsucirilor;
- cu instrumente și dispozitive speciale - pentru determinarea uzurilor și fisurilor microscopice;
- defectoscopie nedistructivă - cu lichide penetrante, cu radiații Gamma, ultrasonic, cu aparate de măsură electrice și magnetice.

1.2 Analiza literaturii de specialitate privind metodele actuale de detectare a defectelor în plăci

Detecția defectului reprezintă o problemă esențială, aceasta îi preocupă pe numeroși cercetători, care folosesc metode analitice și experimentale. Un mare număr de cercetători sunt preocupați de problema generală a monitorizării sănătății unei structuri. Metodele monitorizării structurii pot fi globale sau locale. Metodele globale evaluează simultan condițiile întregii structuri, în timp ce metodele locale furnizează informații despre o regiune relativ mică a sistemului, folosind măsurători locale. Aceste abordări sunt complementare, alegerea metodelor depinzând de scopul problemei și de natura rețelelor de senzori implementați structurii. Modelul procedural al detectării defectului depinde de nivelul defectului, de natura instrumentelor utilizate, de rezoluția spațială a senzorilor, de nivelul de zgomot măsurat, de configurația topologiei structurilor testate, de complexitatea schemei de detectare și de gradul de cunoaștere a posibilelor defecte ale structurii.

Efectele defectului asupra structurii pot fi liniare sau neliniare. O situație de defect liniar este definită ca un caz în care o structură inițial liniar-elastică rămâne liniar-elastică după producerea defectului. Schimbările în proprietățile modale sunt rezultatul unor schimbări în geometria sau/și în proprietățile materiale ale structurii, dar rezultatul structural poate fi încă modelat folosind o ecuație de mișcare liniară. Metodele liniare pot fi mai departe clasificate în metode de bază sau metode care nu sunt de bază. Metodele cu modele de bază presupun că structura monitorizată răspunde într-o manieră prestabilită, care poate fi discretizată foarte fin în analiza cu element finit, tratată în teoria Euler-Bernoulli.

Defectul neliniar este definit ca un caz în care o structură inițial liniar-elastică se comportă într-o manieră neliniară după aplicarea unui defect. De exemplu, un defect neliniar este apariția fisurii la oboseală, care ulterior se deschide și se închide într-un mediu cu vibrații libere. Un alt exemplu este pierderea conexiunilor la zgomot produse de vibrațiile libere, în cazul unui material neliniar, ca de exemplu polimerii. Majoritatea studiilor de specialitate se referă la problema defectului liniar.

Un alt factor care pune probleme este acela că de obicei defectele sunt locale. În literatura de specialitate se consideră că răspunsul local este captat de modurile de frecvențe înalte, în timp ce modurile de frecvențe joase tind să capteze răspunsul global al structurii și sunt mai puțin sensibile la transformările locale. În timpul testării este mai dificil să aplici frecvențe înalte asupra structurii, deoarece în acest caz este necesară o energie mare pentru a obține un răspuns măsurabil față de cazul unor frecvențe joase. Acești factori cuplați cu pierderea informațiilor din timpul măsurărilor proprietăților modale fac și mai dificil procesul de identificare a defectului cu vibrații libere.

Metodele de evaluare nedistructivă pentru detectarea defectului în plăci subțiri sunt tot mai des folosite pentru diferite tipuri de plăci, folosind analiza semnăturii răspunsului sistemului. Diversele categorii de scheme de evaluare nedistructivă sunt mai puțin sensibile la ipotezele inițiale, ceea ce prezintă un mare avantaj. Luând în calcul detaliile unei scheme de evaluare nedistructivă, accentul este pus pe analiza semnăturii răspunsului, furnizând o abordare globală pentru diagnosticarea defectului, spre deosebire de alte metode locale care solicită o analiză precisă a zonei defectului suspectat.

Defectul se referă la degradarea sau distrugerea unui material și își are originile în diverse fenomene precum oxidarea, carbonatarea sau orice alt tip de dezintegrare sau slăbire, provocate de îmbătrânire sau procese mecanice. Defectele mecanice conduc la distrugerea zonei afectate, fiind asociate cu proprietățile materiale locale, și anume [114]: modulul lui Young, momentul de inerție, tensiunea, flexibilitatea și disiparea energiei. Când asemenea schimbări se produc, ele duc la transformarea întregului sistem fizic. Aceste schimbări determină transformări ale vibrației caracteristice, în spațiul fizic și în spațiul material.

Tehnicile experimentale în detectarea vibrațiilor au un rol esențial. Tehnicile de măsurare sunt eficiente și sunt foarte mult utilizate. Măsurarea optică este una dintre cele mai eficiente tehnici de măsurare, deoarece contactul dintre senzor și specimen nu este prezent, dar conduce la o măsurare mai riguroasă. Asocierea dintre formele modale, frecvențele înalte și ultraînalte poate fi demonstrată experimental, folosind tehnica măsurării optice.

Choi, Park, Yoon și Stubbs [18] au obținut transformări în distribuția modală folosind forme modale înainte și după producerea defectului în placă. Experimentul a fost realizat pe o placă de oțel cu toate laturile fixate prin sudare. Încărcarea s-a realizat cu ajutorul ciocanului de impact și experimentul a fost repetat pentru verificarea rezultatelor. Accelerometrul de răspuns a fost lipit pe specimen, un analizator de semnal cu patru canale și un computer au fost utilizate pentru a colecta datele. Au fost studiate patru tipuri diferite de defecte și s-au tras concluzii abordând energia de tensiune.

Swamidas și Chen [104] au concluzionat, prin monitorizarea funcțiilor de răspuns ale frecvenței de tensiune locală și a diferenței dintre formele modale de tensiune, că pot fi determinate locul și dimensiunile defectului, care se produc în structură. Analiza modală a fost realizată pe o placă prinsă în consolă cu un defect mic, folosind analiza cu element finit. În alte studii desfășurate în paralel, ei au observat că folosirea unor proceduri experimentale corecte poate elimina zgomotul produs de aparatul de măsurare a tensiunii.

Titurus, Friswell și Starek [108] au dezvoltat o metodă pentru detectarea locului defectului și au aplicat-o într-un studiu experimental. Au fost studiate sensibilitatea modală și transformările în cantitatea modală măsurată, care apar datorită defectului structural.

Vanlanduit, Guillaume, Schoukens și Parloo [112] au definit tehnicile de detectare a defectului liniar și neliniar. Locul și dimensiunea defectului aplicat au fost comparate cu locul și dimensiunea defectului din experiment. După ce au obținut liniile modale, au ajuns la concluzia că este necesar un raport semnal / zgomot semnificativ, pentru a obține o schemă de detecție.

Gordon și Douglas [41] au folosit unde Lamb pentru detectarea defectului. În această lucrare tipurile de defecte au fost comparate cu tipurile de defecte explicate în literatura de specialitate. Au introdus un defect într-o aripă de avion și distribuția parametrilor defectului a fost comparată cu simularea unui caz ideal.

Dificultățile în formularea parametrilor defectului se datorează mai multor factori, cum ar fi: aplicabilitatea la diferite materiale, poziția defectului, forma geometrică a defectului, diferite condiții de sprijin, diferite moduri de vibrații și sunt indicate de numeroasele propuneri făcute de-a lungul timpului, precum: frecvențele naturale, liniile modale, influența coeficientului de flexibilitate, forma curbării liniilor modale. Fundamental este faptul că performanțele acestor măsurători sunt dependente de gravitatea problemei, ceea ce a condus la obținerea unor concluzii conflictuale atunci când sunt utilizate aceleași măsurători în condiții diferite.

Zimmerman și Simmermacher [123] au calculat rigiditatea la încovoiere în urma unor multiple încărcări statice, folosind teste de vibrații. Această tehnică este parțial propusă ca o metodă pentru a opri nepotrivirile din rezultatele testelor cu element finit. Aceștia au mai prezentat alte două tehnici pentru depășirea deficiențelor care existau între vectorii reziduali când rezultatele unui test static sau modal reprezintă combinații liniare ale rezultatelor testelor anterioare.

Kaouk și Zimmerman [62] au extins algoritmul MRPT (Mobile Robot Programming Toolkit) pentru a estima masa, rigiditatea și simultan au considerat că amortizarea este

proporțională cu matricea de perturbații. Ei au reușit să calculeze matricea de perturbații prin folosirea condițiilor ortogonale transversale ale formelor modale măsurate, respectând proprietățile matricei de perturbație a defectului. Autorii au examinat rezultatele prin calcularea vectorului cumulativ al defectului.

Chen și Garba [16] au prezentat o metodă de minimalizare a proprietăților perturbațiilor modelului standard, aplicând o constrângere astfel încât forțele modale aplicate să tindă spre zero.

Ricles [96] a prezentat o metodă pentru îmbunătățirea matricii sensibilității de bază, care ține cont de variațiile în masa sistemului și de rigiditate, poziția centrului de masă, schimbările în frecvența naturală, formele modale și factorii statistici pentru parametrii structurali. Metoda folosește o matrice de sensibilitate hibridă analitică-experimentală, în care sensibilitatea parametrilor modali este obținută din datele experimentale, iar matricea de sensibilitate este obținută din modelul analitic. Această metodă a fost ulterior dezvoltată și aplicată la mai multe exemple numerice de către Ricles și Kosmatka.

Zimmerman și Kaouk [122] au implementat o tehnică de atribuire a structurilor proprii pentru detectarea defectului. Au inclus algoritmi pentru a îmbunătăți formele proprii și a păstra proprietățile structurii în modelul îmbunătățit. Au aplicat această metodă pentru a identifica modulul de elasticitate al barei.

Jiu Hui Wu, A. Q. Liu și H. L. Chen [59] propun o metodă care folosește funcțiile Bessel pentru a obține soluții exacte de analiză a vibrațiilor libere în cazul unei plăci subțiri, rectangulare, cu trei condiții la limită: simplu rezemată pe toate laturile, încastrată pe toate laturile, simplu rezemată pe două laturi opuse și încastrată pe celelalte două laturi. Deoarece funcțiile Bessel satisfac ecuația diferențială biarmonică a plăcilor solide subțiri și cu exactitate condițiile la limită pentru plăcile subțiri, s-au calculat frecvențele naturale și modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

An H, An W. G., Zhao W. T. [4] au analizat influența diferitelor tipuri de defecte, incluzând distorsiunile inițiale, ruperea, adâncimea defectului, aplicând o tensiune maximă asupra unui element al plăcii. Ei au comparat un sistem structural cu mai multe defecte cu un sistem structural fără defecte.

Nicknam A., Hosseini M. H. [85] au îmbunătățit o metodă pentru localizarea și evaluarea defectului în plăci, calculând frecvența naturală și formele proprii pentru această placă. Ei au aplicat metoda pentru o placă fixată pe toate laturile și au obținut o estimare cantitativă a defectului în placă.

Zhu H.P., He B., Chen X. Q [121] au demonstrat fezabilitatea utilizării doar a frecvențelor naturale pentru a identifica defectul global prin folosirea a două metode, analiza sensibilității și rețelele neurale. Au luat în calcul anumite aspecte ale identificării defectului, cum ar fi problema testelor modale incomplete și calitatea detectării defectului. Au testat în laborator un cadru cu trei nivele și au demonstrat posibilitatea detectării defectului cu ajutorul frecvențelor. Rezultatele numerice arată că defectul poate fi localizat corect și tipul de defect poate fi identificat cu o mare precizie cu ajutorul variațiilor de frecvență care este o combinație liniară a sensibilității, de forma:

$$\{\delta\omega\} = [S] \cdot \{\delta k\}$$

unde: $\{\delta\omega\}$ - reprezintă schimbarea rigidității fiecărui element din placă

$\{\delta k\}$ - reprezintă transformările în frecvența naturală a plăcii.

Choi S. H. [19] a dezvoltat un algoritm pentru a stabili locul și dimensiunea defectului într-o placă. A utilizat două metode, una folosind ecuația de mișcare diferențială, iar cealaltă folosind energia elastică la solicitare. Pentru a identifica posibilele defecte și severitatea defectului folosește un indice pentru fiecare defect pe care îl exprimă în termenii deplasării modale obținute numeric din formele modale pentru plăci cu defect și plăci fără defect. Locul defectului este identificat prin aplicarea indicatorilor de defect în concordanță cu regulile dezvoltate anterior. Fiecare dintre cele două metode este demonstrată folosind exemple numerice pentru o placă simplă rezemată cu un defect simulat. Din studiul numeric el a tras următoarele concluzii:

- algoritmul de detectare nedistructivă a defectului poate fi utilizat pentru identificarea defectului și estimarea severității;
- simularea numerică a structurii unei plăci arată că algoritmul propus poate identifica locul unui sau mai multor defecte;
- performanța identificării locului defectului și al severității poate fi îmbunătățită prin utilizarea unui indice compozit al defectului care folosește în mod simultan mai multe forme modale;
- metoda propusă pentru detectarea severității produce mai puține deteriorări ale plăcii.

Matveev V.V., Boginich O.E. [77] au descris o procedură de determinare analitică aproximativă a parametrilor la oboseală a defectului în plăcile rectangulare. În defectul inițial au aplicat o valoare relativă a energiei potențiale de tensiune datorită existenței unui defect deschis de Mod I și, bazându-se pe valoarea acestuia, au identificat relații pentru determinarea variației frecvenței naturale a plăcii, ca și parametrii de distorsiune ai

oscilațiilor monoarmonice la rezonanță pentru modul fundamental și pentru superarmonice de ordinul 2.

Nicknam A., Hosseini M. H., Bagheri A. [84] au studiat o metodă pentru identificarea defectului folosind vibrațiile și pentru reducerea zgomotului aplicabilă în structurile bidimensionale utilizând transformările curbilinii. Pentru acest scop au folosit transformarea curbilinie prin metoda împachetării. Siguranța metodei propuse este demonstrată prin intermediul unui studiu de verificare care presupune compararea rezultatelor numerice cu cele ale datelor experimentale în structura plăcii. Au studiat două cazuri, primul caz cu un nivel, iar al doilea cu trei niveluri, cu defecte în diferite poziții și cu diferite niveluri de zgomot. Au demonstrat în ambele cazuri concordanța între defectul asumat și cel simulat. Prin această metodă ei au detectat defectul și au eliminat zgomotul.

1.3 Teoria plăcilor subțiri

Placa este un corp solid care are una dintre dimensiuni (grosimea) mai mică decât celelalte două (lungimea și lățimea) și poate fi privit ca materializarea unei suprafețe, așa cum o bară este materializarea unei linii. O placă se definește [9], în general, prin forma și dimensiunile suprafeței mediane, iar în fiecare punct al acesteia, se consideră o normală pe care se definește grosimea, h , de o parte și de alta a suprafeței mediane, prin valorile $h/2$.

Plăcile au o importanță deosebită în ingineria mecanică, deoarece numeroase structuri au în componența lor plăci de diferite forme și dimensiuni. Calculul plăcilor și structurilor din plăci este dificil, deoarece se ajunge la sisteme de ecuații cu derivate parțiale, greu de integrat și rezolvat. De asemenea, trebuie făcut calcul static, dinamic, de vibrații, de stabilitate etc.

Teoria plăcilor face o serie de ipoteze simplificatoare, unele generale, de principiu, și altele de calcul, prin care se neglijează unii termeni din ecuațiile sau soluțiile respective. Din aceste motive s-a ajuns în situația că se utilizează mai multe variante ale teoriei plăcilor, fiecare având delimitările, precizia, avantajele și dezavantajele sale.

În inginerie se folosesc următoarele categorii de plăci [5,15,66]:

1) după mărimea suprafeței mediane:

- plăci mici;
- plăci mari;

2) după forma suprafeței mediane:

- plăci plane;
- plăci curbe;
- plăci cu curbură simplă;

- plăci cu curbură dublă;

3) după mărimea grosimii suprafeței mediane:

- plăci subțiri, cu deformații și deplasări mici;
- plăci subțiri, cu deplasări mari;
- plăci groase;
- membrane- sunt plăci cu grosime neglijabilă, flexibile și pot prelua numai forțe situate în planul propriu.

4) după forma grosimii suprafeței mediane:

- plăci cu grosime constantă;
- plăci cu grosime regulată;
- plăci cu grosime neregulată;
- plăci cu grosime variabilă;

În ce privește modul de rezemare al plăcilor, acesta poate fi:

- continuu, pe tot conturul plăci sau pe o parte a acesteia;
- pe toată suprafața plăcii, dacă placa este elastică;
- discret.

Prima abordare matematică a problemei plăcilor îi aparține lui Euler care, în 1776, a realizat o analiză a vibrației libere a unei plăci. Chladni a descoperit mai multe moduri pentru vibrația liberă a plăcilor. În experimentele pe plăci orizontale a folosit pudră distribuită în mod uniform pe suprafața superioară a plăcii, care a creat forme regulate după inducerea unei vibrații. Pe suprafața plăcii au apărut liniile nodale. James Bernoulli a încercat să justifice teoretic rezultatele acestor experimente acustice. Soluția lui James Bernoulli se bazează pe rezultatele cercetărilor anterioare ale lui Euler și Daniel Bernoulli referitoare la teoria încovoierii barelor. Placa a fost considerată de J. Bernoulli, ca un sistem de benzi perpendiculare reciproce între ele, fiecare bandă fiind considerată ca o bară. În acest caz, ecuația diferențială care le guvernează nu conține termenii medii. Germain a dezvoltat ecuația diferențială a plăcii, dar îi lipsește termenul de deformare. Lagrange introduce în ecuația diferențială a plăcilor termenul de deformare. El este primul care a prezentat în mod corect ecuația generală a plăcilor.

Cauchy și Poisson au formulat problema încovoierii plăcilor plecând de la ecuația generală din teoria elasticității. Aplicând seriile de puteri pentru o suprafață infinitezimabilă, ei au reținut doar termenii de ordinul întâi. Ei au obținut ecuația diferențială pentru deformări care coincide cu ecuația Germain-Lagrange. În 1829, Poisson, pornind de la ecuația Germain-Lagrange, a găsit soluția pentru o placă cu încărcare statică. În această

soluție, rigiditatea D a plăcii a fost considerată constantă. Poisson a introdus trei condiții la limită. Condițiile la limită introduse de Poisson și discuțiile despre numărul și natura acestora au fost subiectul multor controverse și au fost supuse unor cercetări ulterioare. Prima teorie satisfăcătoare despre deformarea plăcilor este legată de numele lui Navier. El a introdus o metodă exactă care transformă ecuația diferențială într-o expresie algebrică folosind seriile trigonometrice Fourier.

În 1850, Kirchhoff a publicat o teză importantă despre teoria plăcilor subțiri. În această teză, Kirchhoff a introdus două ipoteze de bază, independente, care sunt acum acceptate pe scară largă în teoria de încovoiere a plăcilor și sunt cunoscute ca „ipotezele lui Kirchhoff”. Folosind aceste ipoteze, Kirchhoff a simplificat energia funcțională în teoria elasticității tridimensionale pentru încovoierea plăcilor. El a stabilit că există doar două condiții la limită de prindere a plăcii. O altă contribuție importantă a lui Kirchhoff este descoperirea ecuației frecvenței plăcilor și introducerea metodei deplasării virtuale în cazul plăcilor. Teoria a fost aplicată cu succes în practică.

Lord Kelvin (Thomson) și Tait au oferit o perspectivă suplimentară în ce privește condițiile la limită pentru ecuații, transformând momentele de torsiune de-a lungul muchiei unei plăci în forțe de forfecare. Comentarii asupra teoriei lui Kirchhoff a făcut Saint-Venant care a scris într-o formă matematică corectă ecuația diferențială a plăcilor subțiri. Tot el a demonstrat că seriile trigonometrice propuse de Cauchy și Poisson au soluții divergente.

Soluția ecuației plăcilor rectangulare pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele opuse, iar pe celelalte două laturi fiind sprijinită arbitrar a fost rezolvată de Levy, la sfârșitul secolului al XIX-lea.

La sfârșitul secolului al XIX-lea – începutul secolului al XX-lea, constructorii de nave au schimbat metodele de construcție prin înlocuirea lemnului cu structură de oțel, ceea ce a dus la dezvoltarea teoriei plăcilor. Krylov și Bubnov au extins teoria plăcilor subțiri având diferite rigidități de încovoiere. Bubnov a pus bazele teoriei plăcilor curbe și el a fost primul care a introdus o clasificare modernă a plăcilor. Tot el a propus o nouă metodă de integrare a ecuației diferențiale a elasticității și a creat tabelul de deformări maxime și momentele de încovoiere maximă pentru diferite proprietăți ale plăcilor. Galerkin a dezvoltat o metodă pe care a aplicat-o în analiza încovoierii plăcilor pentru a rezolva această problemă aplicată la diferite forme ale plăcilor. Timoshenko și-a adus contribuția la rezolvarea problemei stabilității elastice a plăcilor circulare cu deformații mari.

Studii importante în teoria plăcilor au avut: Hencky [54], Huber [55], von Karman [63,64], Nadai [82], Föppl [31]. Hencky și-a adus contribuția la teoria deformărilor mari și la

teoria generală a stabilității elastice a plăcilor subțiri. Nadai a făcut cercetări teoretice și experimentale legate de teoria plăcilor lui Kirchhoff. A tratat diferite tipuri de singularități în plăci aplicând o forță concentratoare și a studiat efectele într-un punct de sprijin. Ecuația generală pentru deformările mari ale plăcilor foarte subțiri a fost simplificată de Föppl, care a folosit funcții de presiune aplicate pe mijlocul plăcilor plane. Forma finală a ecuației diferențiale în teoria plăcilor cu deformări mari a fost dezvoltată de von Karman.

Huber a dezvoltat o teorie aproximativă a plăcilor ortotropice și a rezolvat subiectul plăcilor cu încărcare distribuită asimetric. Bazele teoriei generale a plăcilor anizotropice au fost puse de Gehring și Boussinesq. Lekhnitskii a contribuit la dezvoltarea teoriei și aplicațiilor analizând plăcile anizotropice lineare și nelineare. Tot el a dezvoltat o metodă cu variabile complexe aplicată în analiza plăcilor anizotropice.

Dezvoltarea industriei aeronautice moderne a generat un nou impuls pentru o analiză mai riguroasă a problemei plăcilor. Problema plăcilor și a vibrațiilor plăcilor a fost cercetată de numeroși oameni de știință din domeniul ingineriei. E. Reissner [80] a dezvoltat o teorie riguroasă a plăcilor în care consideră că deformarea este cauzată de forțele tăietoare transversale.

Ecuația fundamentală pentru plăcile subțiri rectangulare supuse la forțe de compresie N_x a fost pentru prima dată derivată de Navier [114]. Problema flambajului unei plăci simplu rezemată, supusă la o forță de compresie constantă care acționează pe o direcție, respectiv două direcții a fost rezolvată de Bryan, care a utilizat o metodă energetică. Cox și Hartmann au prezentat soluții pentru diverse probleme de flambare a plăcilor subțiri rectangulare în compresie. Southwell and Skan au studiat efectul unei forțe de forfecare la flambarea unei plăci rectangulare simplu rezemată.

O ecuație diferențială a mișcării plăcilor subțiri poate fi obținută prin aplicarea principiului lui D'Alembert sau aplicând conservarea energiei. Prima soluție exactă a problemei vibrației libere a plăcilor rectangulare simplu rezemate pe două laturi opuse a fost găsită de Voight. Folosind problema vibrațiilor libere a plăcilor rectangulare cu margini libere, Ritz a dezvoltat o metodă pentru extinderea principiului Rayleigh pentru obținerea limitelor superioare a frecvenței vibrațiilor. Poisson a analizat ecuația vibrațiilor libere pentru plăci circulare. Vibrațiile libere și forțate ale plăcilor de diferite forme au fost analizate de Timoshenko, Young, Den Hartog și Thompson [105,106,107]. O carte de referință a lui Leissa [74] prezintă pentru vibrația liberă a plăcilor un număr considerabil de rezultate pentru frecvențe și forme modale foarte utile pentru cercetători în domeniul ingineriei.

1.4 Parametrii definitori ai comportamentului dinamic al plăcilor

Comportamentul dinamic al plăcilor subțiri elastice de grosime constantă este definit de câteva elemente definitorii, modificarea acestora conducând la modificarea sensibilă și semnificativă a parametrilor esențiali, cum ar fi: frecvențele naturale, forma modurilor proprii și curbura modală, amortizarea modală etc.

Caracteristicile mecanice și fizice ale materialului din care sunt construite plăcile sunt [5,15,66]:

- 1) modulul de elasticitate longitudinal sau modulul lui Young, E
- 2) modulul de elasticitate transversal, G
- 3) coeficientul lui Poisson, ν
- 4) densitatea, ρ

În tabelul 1.1 sunt trecute valorile acestor mărimi pentru diferite materiale din care sunt construite plăcile.

Tabelul 1.1. Caracteristicile mecanice și fizice ale plăcilor

Caracteristica		U.M.	Oțel	Aluminiu
Densitatea ρ		kg/m ³	7800 ... 7900	2700
Modulul de elasticitate	longitudinal E	N/m ²	$2,1 \times 10^{11}$	$0,71 \times 10^{11}$
	transversal G	N/m ²	$(7,36 \dots 7,93) \cdot 10^{10}$	$0,28 \times 10^{11}$
Coeficientul lui Poisson ν		-	0,27 – 0,30	0,33

Relația dintre modulul de elasticitate longitudinal E și modulul de elasticitate transversal G pentru materiale liniar-elastice este dată de relația [5,15,66]:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.1)$$

Caracteristicile geometrice ale plăcilor sunt prezentate în tabelul 1.2.

Tabelul 1.2. Caracteristicile geometrice ale plăcilor

Nr. crt.	Denumire	Aspect	Aria suprafeței
1.	pătrat		$A = a^2$
2.	dreptunghi		$A = a \cdot b$
3.	cerc		$A = \pi \cdot r^2$

unde:

- a – lățimea;
- b – lungimea plăcii;
- r – raza plăcii circulare.

Modul de rezemare este un alt element definitoriu în comportamentul static și dinamic al plăcilor subțiri. Câteva dintre modurile de rezemare cel mai des utilizate în practică presupun următoarele condiții la limită [2,3,9,12,13,14,25,50,72,73,74,76,106,107,114,115,116]:

- pentru o latură liberă, de ecuație $x=a$, momentul încovoiator, paralel cu latura și forța tăietoare sunt nule:

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = 0, \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.2)$$

- pentru o latură simplu rezemată, de ecuație $x=a$, săgeata și momentul încovoiator paralel cu latura sunt nule:

$$W(a, y, t) = 0, \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (1.3)$$

- pentru o latură încastrată, de ecuație $x=a$, săgeata și rotirea într-un plan perpendicular pe latură sunt nule:

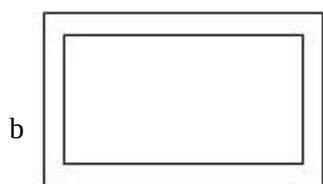
$$W(a, y, t) = 0, \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (1.4)$$

În figura 1.1. sunt reprezentate modurile de prindere pe contur a plăcii dreptunghiulare:

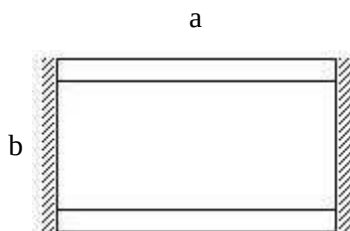
În tabelul 1.3. sunt prezentate simbolurile pentru diverse tipuri de rezemare a plăcilor.

Tabelul 1.3. Tipuri de rezemare a plăcilor

Nr. crt.	Denumire	Simbolizare	Nr. crt.	Denumire	Simbolizare
1.	Simplu rezemat pe două laturi paralele	SR	5.	Simplu rezemată pe două laturi paralele și încastrată pe celelalte două laturi	SR-ÎÎ
2.	Liber pe două laturi paralele	LL	6.	Simplu rezemată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi	SR-LL
3.	Încastrată pe două laturi paralele	ÎÎ	7.	Încastrată pe toate laturile	ÎÎ-ÎÎ
4.	Simplu rezemat pe toate laturile	SR-SR	8.	Încastrată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi	ÎÎ-LL



a) simplu rezemat pe toate laturile



b) simplu rezemat pe 2 laturi și
încăstrată
pe 2 laturi



c) simplu rezemat pe 2 laturi și
liberă
pe 2 laturi



d) încăstrată pe toate laturile



e) încăstrată pe 2 laturi și liberă
pe 2 laturi

Notă: reprezentarea
folosită



Fig. 1.1. Moduri de prindere a plăcilor

1.5 Concluzii

În practica inginerescă se utilizează o mare varietate de plăci diferențiate de volum, formă geometrică, contur și de modul de rezemare. În plus, în definirea comportamentului dinamic al plăcilor, intervin aspecte privind forma secțiunii, caracteristicile fizice și mecanice și existența unor discontinuități. Numeroase studii prezentate în literatura de specialitate s-au concentrat pe studiul plăcilor în comportament static și dinamic, fiind stabilită forma deformată. Sunt de asemenea cunoscute metode și modele de analiză modală a plăcii pătrate pentru diferite moduri de rezemare. Sunt definite astfel soluții pentru calculul frecvențelor și determinarea formei modale pentru unul sau mai multe moduri. Lucrarea își propune să determine cele mai potrivite relații care descriu comportamentul dinamic modal al plăcilor subțiri elastice și să identifice „semnături” particulare ale defectelor asupra „amprentei modale”.

CAP. 2 ANALIZA PARAMETRICĂ A COMPORTAMENTULUI DINAMIC ÎN CAZUL PLĂCILOR SUBȚIRI FĂRĂ DEFECT

2.1 Introducere

Se consideră o placă omogenă, izotropă de grosime constantă h , cu masa distribuită uniform și acționată dinamic pe direcția normală la planul plăcii, cu suprafața mediană în planul xOy . Forma deformată a suprafeței mediane $Z(x,y)$ satisface ecuația diferențială biarmonică a plăcilor plane de grosime constantă stabilită în teoria elasticității [1,3, 9,11,26,42,50,92,95,100,101,109,119], de forma:

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad (2.1)$$

$$\Delta \Delta Z = \frac{p(x,y)}{D} \quad (2.2)$$

unde:

- $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ este rigiditatea la încovoiere a plăcii [3,9];
- $Z=Z(x,y)$ este deplasarea suprafeței mediane a plăcii pe direcția normală;
- h – grosimea plăcii;
- ν – coeficientul de contracție transversală (coeficientul Poisson);
- $\Delta \Delta$ – operatorul biarmonic în coordonate rectangulare.

Operatorul biarmonic în coordonate rectangulare [9,51] este de forma:

$$\Delta \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

Când placa execută vibrații pe direcția z , săgeților statice $Z(x,y)$ li se adaugă deplasările $W(x,y,t)$, iar încărcările statice i se adaugă forțele de inerție pe unitatea de

suprafață de forma $-\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ și forțele perturbatoare $p_0(x,y,t)$.

Aceste deplasări verifică ecuația diferențială de ordinul patru [1,3, 9,26,42,50,69,92,95,100,101,109] de forma:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{p_0(x,y,t)}{D} \quad (2.4)$$

Dacă ecuației (2.4) i se adaugă condițiile inițiale și condițiile la limită care modifică modul de rezemare, se pot determina modurile proprii și pulsațiile cu care placa poate executa o vibrație.

În cazul vibrațiilor libere, când forța perturbatoare $p_0(x,y,t)=0$, atunci deplasarea $W(x,y,t)$ este o funcție de forma [1,3, 9,26,42,50,92,95,100,101,109]:

$$W(x,y,t) = Z(x,y) \sin(\omega_{mn}t + \theta_{mn}) \quad (2.5)$$

Introducând (2.5) în ecuația de mișcare (2.4), se obține ecuația cu derivate parțiale a suprafeței deformate, de forma [1,3, 9,26,42,50,92,95,100,101,109]:

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Z}{\partial y^4} - \lambda^4 Z(x,y) = 0 \quad (2.6)$$

unde:

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho \cdot h}{D} \quad (2.7)$$

2.2 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa simplu rezemată pe toate laturile

În cazul unei plăci dreptunghiulare simplu rezemată pe două laturi paralele $x = 0$ și $x = a$, funcția $Z_{mn}(x,y)$ este de forma [3,9,114,115]:

$$Z_{mn}(x,y) = Y_m(y) \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right), \text{ unde } n \in N^* \quad (2.8)$$

care satisface următoarele condiții la limită [3,9]:

$$Z(0,y) = 0; \quad Z(a,y) = Y_m(y) \sin n\pi = 0, \quad (n = 1,2,3,...) \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) \bigg|_{x=0}^{x=a} = 0 \quad (2.10)$$

Introducând funcția (2.8) în ecuația diferențială de ordinul patru (2.6), se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul patru cu coeficienți constanți, de forma [3,9]:

$$\frac{d^4 Y}{dy^4} - 2 \frac{n^2 \pi^4}{a^2} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} + \left(\frac{n^4 \pi^4}{a^4} - \lambda^4 \right) Y = 0 \quad (2.11)$$

Ecuația caracteristică pentru ecuația diferențială de ordinul patru (2.11) este [3,9]:

$$r^4 - 2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} r^2 + \left(\frac{n^4 \pi^4}{a^4} - \lambda^4 \right) = 0 \quad (2.12)$$

Rădăcinile ecuației caracteristice (2.12) sunt [3,9]:

$$r^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \pm \lambda^2 \quad (2.13)$$

Folosind notațiile [3,9]:

$$\beta_m^2 = \lambda^2 - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad \alpha_m^2 = \lambda^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \quad (2.14)$$

se obțin rădăcinile ecuației caracteristice (2.12), de forma [50]:

$$\begin{aligned} r^2 &= \alpha_m^2 \text{ adică } r_{1,2} = \pm \alpha_m \\ r^2 &= \beta_m^2 \text{ adică } r_{3,4} = \pm i \beta_m \end{aligned} \quad (2.15)$$

Pe baza soluțiilor anterioare, se pot dezvolta pentru ecuația diferențială (2.12) următoarele soluții [50]:

$$Y(y) = A_m e^{\alpha_1 y} + B_m e^{\alpha_2 y} + C_m e^{\alpha_3 y} + D_m e^{\alpha_4 y} = A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y} + C_m e^{i \beta_m y} + D_m e^{-i \beta_m y} \quad (2.16)$$

sau [3,9]:

$$Y_m(y) = A_m \cosh(\alpha_m y) + B_m \sinh(\alpha_m y) + C_m \cos(\beta_m y) + D_m \sin(\beta_m y) \quad (2.17)$$

Constantele A_m, B_m, C_m, D_m se determină din condițiile la limită ce trebuie satisfăcute pe celelalte două laturi paralele cu axa Ox .

Dacă placa este simplu rezemată pe laturile $y=0$ și $y=b$ (tabel 1;a), pentru care săgeata și momentul încovoietor paralel cu latura sunt nule, condițiile la limită sunt [3,9,50]:

$$Z(x,0) = Z(x,b) = 0 \text{ adică } Y_m(0) = Y_m(b) = 0 \quad (2.18)$$

și:

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{y=0}^{y=b} = 0$$

Înlocuind ecuația (2.8) în condiția (2.10), obținem:

$$\left[-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{m\pi x}{a} Y_m(y) + Y_m''(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \right]_{y=0}^{y=b} = 0 \quad (2.19)$$

Rezultă că:

$$Y_m''(0) = Y_m''(b) = 0 \quad (2.20)$$

adică sunt satisfăcute condițiile la limită.

Introducând condițiile la limită (2.18) respectiv (2.20) în ecuația (2.16) se obține sistemul liniar omogen cu necunoscutele A_m, B_m, C_m, D_m :

$$\begin{cases} A_m + B_m + C_m + D_m = 0 \\ A_m e^{\alpha_m b} + B_m e^{-\alpha_m b} + C_m e^{i \beta_m b} + D_m e^{-i \beta_m b} = 0 \\ A_m \alpha_m^2 + B_m \alpha_m^2 - C_m \beta_m^2 - D_m \beta_m^2 = 0 \\ A_m \alpha_m^2 e^{\alpha_m b} + B_m \alpha_m^2 e^{-\alpha_m b} - \beta_m^2 C_m e^{i \beta_m b} - \beta_m^2 D_m e^{-i \beta_m b} = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Punând condițiile ca sistemul (2.21) să admită și soluții diferite de soluția banală, se obține ecuația pulsațiilor proprii de forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\alpha_m \cdot b} & e^{-\alpha_m \cdot b} & e^{i\beta_m \cdot b} & e^{-i\beta_m \cdot b} \\ \alpha_m^2 & \alpha_m^2 & -\beta_m^2 & -\beta_m^2 \\ \alpha_m^2 e^{\alpha_m \cdot b} & \alpha_m^2 e^{-\alpha_m \cdot b} & -\beta_m^2 e^{i\beta_m \cdot b} & -\beta_m^2 e^{-i\beta_m \cdot b} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.22)$$

care se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} & (\alpha_m^2 + \beta_m^2)^2 [e^{i\beta_m \cdot b} (e^{\alpha_m \cdot b} - e^{-\alpha_m \cdot b}) - e^{-i\beta_m \cdot b} (e^{\alpha_m \cdot b} - e^{-\alpha_m \cdot b})] = \\ & = (\alpha_m^2 + \beta_m^2)^2 (e^{\alpha_m \cdot b} - e^{-\alpha_m \cdot b}) (e^{i\beta_m \cdot b} - e^{-i\beta_m \cdot b}) = \\ & = (\alpha_m^2 + \beta_m^2)^2 4 \cdot i \cdot \sinh(\alpha_m \cdot b) \cdot \sin(\beta_m \cdot b) = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Rezolvând ecuația (2.23) se obține:

$$4i(\alpha_m^2 + \beta_m^2) \sinh(\alpha_m b) \sin(\beta_m b) = 0 \quad (2.24)$$

Din ecuația (2.24) rezultă că:

$$\sin \beta_m b = 0 \quad (2.25)$$

adică: $\beta_m b = m\pi, \quad m \in N^* \quad (2.26)$

În urma analizei acestei metode se obțin aceleași soluții ca în studiile prezentate în numeroase referințe internaționale [3,9,73,74].

Din expresia (2.26) rezultă că pentru fiecare valoare naturală nenulă a lui m , există o infinitate de valori ale argumentului $\beta_m b$.

Ridicând la pătrat expresia (2.26), se obține:

$$\beta_m^2 = \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \quad (2.27)$$

Introducând valoarea lui β_m^2 în (2.14) se obține ecuația de valori proprii [3,9,50,73,74]:

$$\lambda_{mn}^2 = \beta_{mn}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right); m, n \in N^* \quad (2.28)$$

Înlocuind notația (2.7) în ecuația de valori proprii (2.28) se obține pulsația proprie a mișcării de forma [3,9,50, 73,74]:

$$\omega_{mn} = \lambda_{mn} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (2.29)$$

Din relația (2.29) se observă că există o infinitate de pulsații proprii cu care placa execută vibrații armonice libere după modul m și o infinitate de pulsații proprii cu care placa execută vibrații armonice libere după modul n .

Pentru constantele de integrare A_m, B_m, C_m, D_m , rezultă că $A_m = B_m = C_m = 0$ și $D_m \neq 0$ deoarece sistemul (2.21) este compatibil nedeterminat.

Atunci soluția ecuației diferențiale (2.16), conform relației lui Euler, este de forma:

$$Y_m(y) = D_m e^{-i\beta_m y} = D_m \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (2.30)$$

Funcțiile proprii ale mișcării, $Z_{mn}(x,y)$, care reprezintă formele (modurile) proprii de vibrație a plăcii dreptunghiulare, sunt [3,9,50, 73,74]:

$$Z_{mn}(x,y) = D_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (2.31)$$

Coeficienții D_{mn} se calculează folosind dezvoltarea Fourier:

$$D_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} \sin \frac{m \cdot \pi \cdot y}{b} dx dy \quad (2.32)$$

unde:

$$\int_0^a \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} dx = -\frac{a}{n \cdot \pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0; & \text{pentru } n - \text{par} \\ \frac{2 \cdot a}{n \cdot \pi}; & \text{pentru } n - \text{impar} \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\int_0^b \sin \frac{m \cdot \pi \cdot y}{b} dy = -\frac{b}{m \cdot \pi} [(-1)^m - 1] = \begin{cases} 0; & \text{pentru } m - \text{par} \\ \frac{2 \cdot b}{m \cdot \pi}; & \text{pentru } m - \text{impar} \end{cases} \quad (2.34)$$

Rezultă că coeficienții D_{mn} sunt de forma:

$$D_{mn} = \begin{cases} 0; & \text{pentru } n - \text{par} \\ \frac{16}{m \cdot n \cdot \pi^2}; & \text{pentru } n - \text{impar} \end{cases} \quad (2.35)$$

Odată determinate pulsațiile proprii și funcțiile proprii se poate scrie expresia deplasării în vibrație după un mod propriu :

$$w_{mn}(x,y,t) = Z_{mn}(x,y) \sin(\omega_{mn} t + \theta_{mn}) \quad (2.36)$$

care se poate realiza doar în următoarele condiții inițiale [3,9,50, 73,74]:

$$\begin{aligned} w(x,y,0) &= Z_{mn}(x,y) \sin \theta_{mn} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \omega_{mn} Z_{mn}(x,y) \cos \theta_{mn} = v_0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

În cazurile în care condițiile inițiale diferă de (2.37) mișcarea rezultată se exprimă printr-o suprapunere de moduri proprii [3,9,50,73,74]:

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{mn}(x,y) \sin(\omega_{mn} t + \theta_{mn}) \quad (2.38)$$

Pentru plăcile dreptunghiulare care nu au două laturi paralele simplu rezemate, funcțiile proprii nu se pot găsi de regulă într-o formă finită, ele se reprezintă prin dezvoltări în serii de funcții ortogonale.

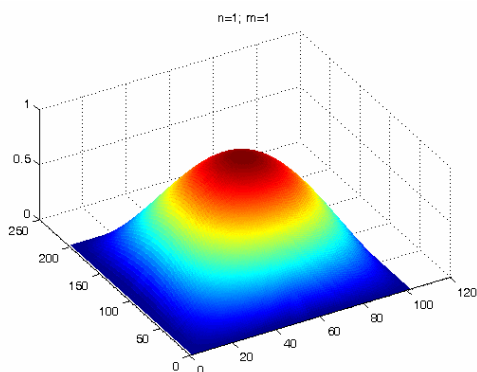
În continuare, se prezintă valorile determinate analitic pentru o placă dreptunghiulară reală, simplu rezemată pe contur, cu laturile $a=430$ mm și $b= 980$ mm din oțel, având modulul de elasticitate $E=2,1 \times 10^{11}$ N/m², coeficientul Poisson $\nu = 0,29$, densitatea $\rho=7850$ kg/m³. În acest caz s-au calculat cu programul Mathcad frecvențele proprii pentru $m=1...10$ și $n=1...10$ în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1. Frecvențele obținute prin calcul analitic

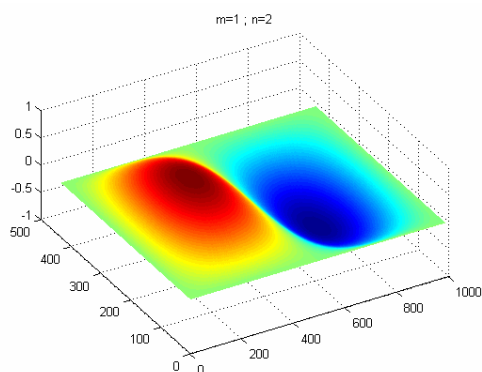
$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	1	2	3	4	5
1	31,611146	111,13444	243,67327	429,22764	667,79753
2	46,921285	126,44458	258,98341	444,53777	683,10767
3	72,438184	151,96148	284,50031	470,05467	708,62457
4	108,16184	187,68514	320,22397	505,77833	744,34823
5	154,09226	233,61556	366,15439	551,70875	790,27864
6	210,22944	289,75274	422,29157	607,84593	846,41582
7	276,57337	356,09667	488,6355	674,18986	912,75976
8	353,12407	432,64737	565,1862	750,74056	989,31046
9	439,88153	519,40483	651,94366	837,49802	1076,0679
10	536,84574	616,36904	748,90787	934,46223	1173,0321

Cu ajutorul programului MATLAB [43,90], s-au determinat formele proprii de vibrație pentru placa dreptunghiulară simplu rezemată pe margini, care sunt prezentate în figura 2.1., unde s-au folosit pasul de 0,005 și relația:

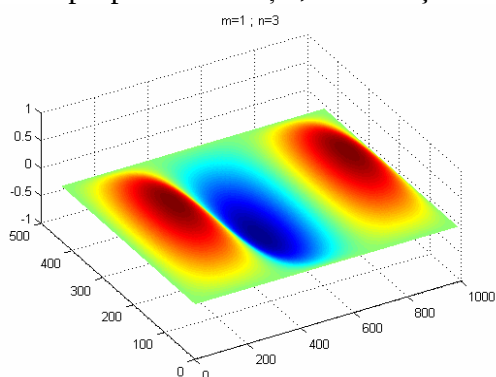
$$Z_{mn}(x, y) = \frac{16}{m \cdot n \cdot \pi^2} \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} \sin \frac{m \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (2.40)$$



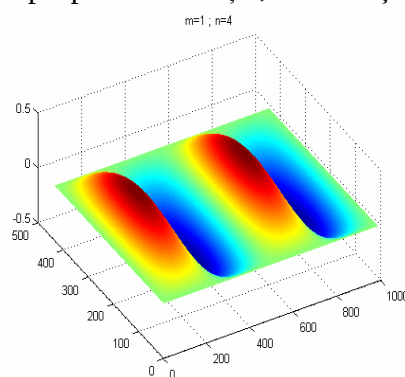
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=1$.



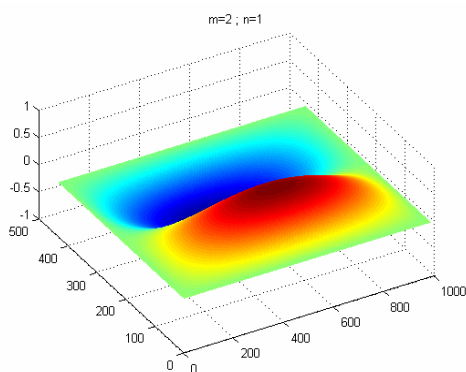
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=2$.



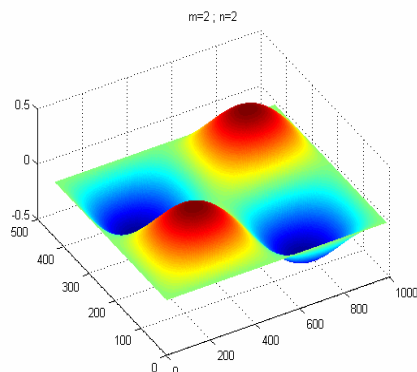
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=3$.



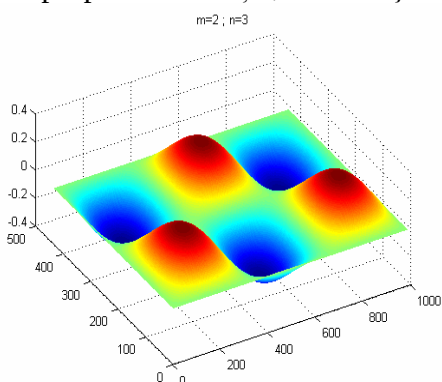
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=4$.



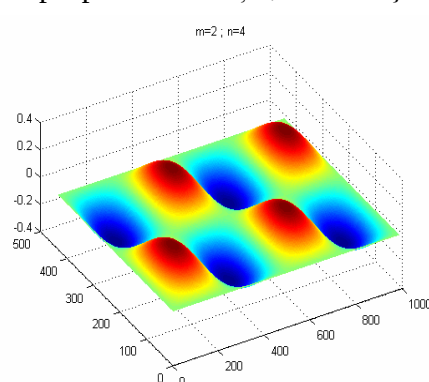
Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=2$.

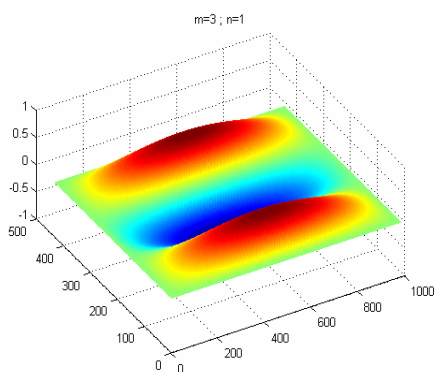


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=3$.

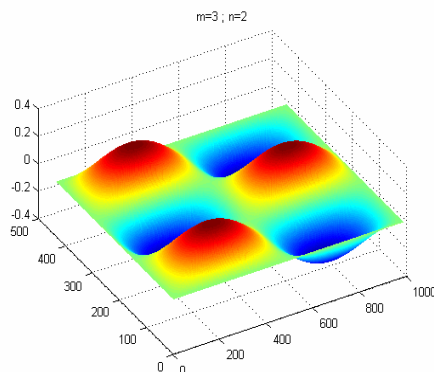


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=4$.

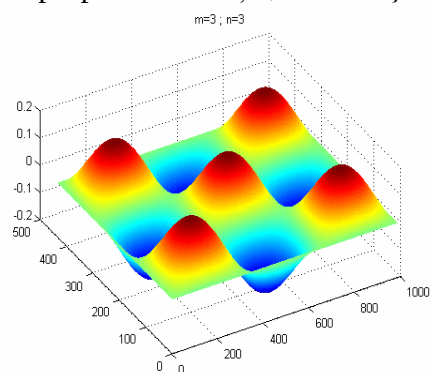
Fig. 2.1. Formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe toate laturile



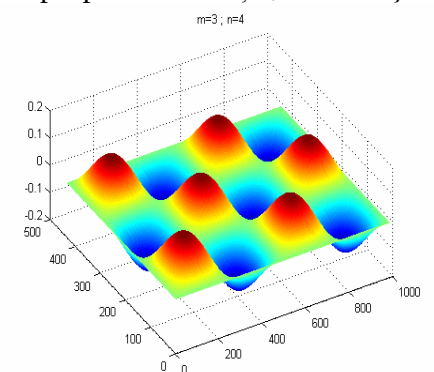
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=1$.



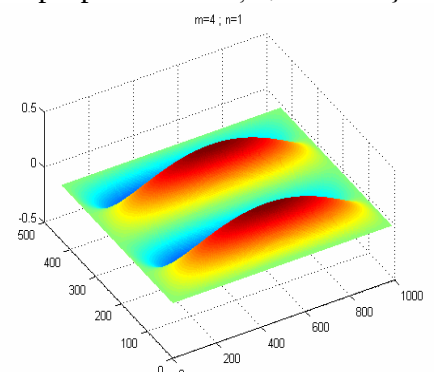
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=2$.



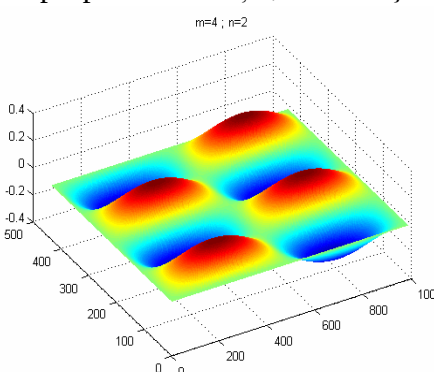
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=3$.



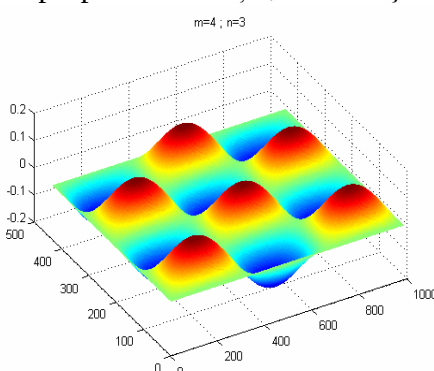
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=4$.



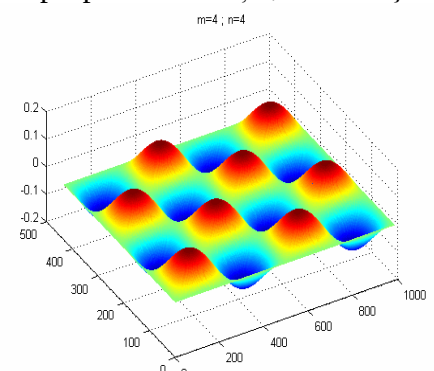
Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=2$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=3$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=4$.

Fig. 2.1. Formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe toate laturile
(continuare)

2.3 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa simplu rezemată pe două laturi opuse și încastrată pe celelalte două laturi

Situația simplu rezemat pe două laturi paralele a fost analizată în paragraful 2.2.1. Soluția generală a ecuației diferențiale (2.6), ca și în cazul anterior, este o funcție de forma [3,9,67,68,73,74]:

$$Y_m(y) = A_m \cosh(\alpha_m y) + B_m \sinh(\alpha_m y) + C_m \cos(\beta_m y) + D_m \sin(\beta_m y) \quad (2.41)$$

Se consideră o placă încastrată la capete pe lățime, laturile $y=0$ și $y=b$ (tabel 1;b), pentru care săgeata și rotirea într-un plan perpendicular pe latură sunt nule. În acest caz, condițiile la limită sunt [3,9,67,68,73,74]:

$$a) Z(x,0) = Z(x,b) = 0$$

din această condiție rezultă:

$$Y_m(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = Y_m(b) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 0 \text{ adică } Y_m(0) = Y_m(b) = 0 \quad (2.42)$$

$$b) Z'_y(x,y) = Y'_m(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), Z'_y(x,0) = Z'_y(x,b) = 0$$

din această condiție rezultă :

$$Y'_m(0) = Y'_m(b) = 0 \quad (2.43)$$

Derivata de ordinul unu a lui Y_m în raport cu y este:

$$Y'_m(y) = \alpha_m A_m \sinh(\alpha_m y) + \alpha_m B_m \cosh(\alpha_m y) - \beta_m C_m \sin(\beta_m y) + \beta_m D_m \cos(\beta_m y) \quad (2.44)$$

Introducând condiția la limită (2.42) în ecuația (2.41), și condiția la limită (2.43) în ecuația (2.44), se obține sistemul liniar omogen cu necunoscutele A_m, B_m, C_m, D_m , de forma:

$$\begin{cases} A_m + C_m = 0 \\ A_m \cosh(\alpha_m b) + B_m \sinh(\alpha_m b) + C_m \cos(\beta_m b) + D_m \sin(\beta_m b) = 0 \\ \alpha_m B_m + \beta_m D_m = 0 \\ \alpha_m A_m \sinh(\alpha_m b) + \alpha_m B_m \cosh(\alpha_m b) - \beta_m C_m \sin(\beta_m b) + \beta_m D_m \cos(\beta_m b) = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Din prima ecuație a sistemului (2.45) rezultă:

$$A_m = -C_m \text{ sau } C_m = -A_m \quad (2.46)$$

Considerăm o soluție particulară de forma $\alpha_m = 0$. Atunci din a treia ecuație a sistemului rezultă că:

$$D_m = 0 \quad (2.47)$$

Înlocuind rezultatele (2.46), respectiv (2.47) în a doua și a patra ecuație a sistemului (2.45), se obține:

$$\begin{cases} -C_m + C_m \cos(\beta_m b) = 0 \\ -\beta_m C_m \sin(\beta_m b) = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Din cele două ecuații ale sistemului rezultă:

$$\cos(\beta_m b) = 1 \text{ sau } \sin(\beta_m b) = 0 \quad (2.49)$$

Soluția acestor ecuații este:

$$\beta_m = \frac{2m\pi}{b} \quad (2.50)$$

Din expresia (2.50), rezultă că pentru fiecare valoare naturală nenulă a lui m există o infinitate de valori ale argumentului $\beta_m \cdot b$.

Ridicând la pătrat expresia (2.50), se obține:

$$\beta_m^2 = \frac{4m^2\pi^2}{b^2} \quad (2.51)$$

Introducând valoarea lui β_m^2 în ecuația (2.14), se obține ecuația caracteristică de forma:

$$\lambda_{mn}^2 = \beta_m^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \pi^2 \left(\frac{4m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right); m, n \in N^* \quad (2.52)$$

Înlocuind notația (2.7) în relația (2.52) se obține pulsația proprie a mișcării de forma:

$$\omega_{mn} = \lambda_{mn} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \pi^2 \left(\frac{4m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (2.53)$$

Din relația (2.53) se observă că există o infinitate de pulsații proprii în funcție de modurile m și n , cu care placa poate executa vibrații armonice libere.

Se consideră cazul $\alpha_m \neq 0$.

Din a treia ecuație a sistemului (2.45), rezultă:

$$B_m = -\frac{\beta_m D_m}{\alpha_m} \quad (2.54)$$

Înlocuind relația (2.46), respectiv (2.54) în a doua și a patra ecuație a sistemului (2.45), se obține:

$$\begin{cases} -C_m \cosh(\alpha_m b) - \frac{\beta_m D_m}{\alpha_m} \sinh(\alpha_m b) + C_m \cos(\beta_m b) + D_m \sin(\beta_m b) = 0 \\ -\alpha_m C_m \sinh(\alpha_m b) - \beta_m D_m \cosh(\alpha_m b) - \beta_m C_m \sin(\beta_m b) + \beta_m D_m \cos(\beta_m b) = 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Punând condiția ca sistemul (2.55) să admită și soluții diferite de soluția banală, se obține ecuația pulsațiilor proprii:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\cosh(\alpha_m b) + \cos(\beta_m b) & -\frac{\beta_m}{\alpha_m} \sinh(\alpha_m b) + \sin(\beta_m b) \\ -\alpha_m \sinh(\alpha_m b) - \beta_m \sin(\beta_m b) & -\beta_m \cosh(\alpha_m b) + \beta_m \cos(\beta_m b) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.56)$$

Rezolvând ecuația pulsațiilor proprii (2.56) se obține ecuația transcendentă [9]:

$$2\alpha_m - 2\alpha_m \cos(\beta_m b) \cosh(\alpha_m b) + \frac{1}{\beta_m} (\alpha_m^2 - \beta_m^2) \sin(\beta_m b) \sinh(\alpha_m b) = 0 \quad (2.57)$$

O soluție a ecuației (2.57) este de forma:

$$\sin(\beta_m b) = 0 \text{ sau } \cos(\beta_m b) = 1 \quad (2.58)$$

Din ecuația (2.57) rezultă că: $1 - \cosh(\alpha_m b) = 0$ adică $\alpha_m = 0$, care este în contradicție cu ipoteza făcută în relația (2.54). Prin urmare, conform analizei efectuate, singura soluție posibilă este dată de relația (2.50).

Deoarece sistemul (2.45) este compatibil nedeterminat soluțiile lui sunt :

$$B_m = D_m = 0 \text{ și } -A_m = C_m \neq 0 \quad (2.59)$$

În acest caz, soluția ecuației diferențiale (2.41) este [72,73,74]:

$$Y_m(y) = A_m \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) \right] \quad (2.60)$$

iar funcțiile proprii ale mișcării, $Z_{mn}(x,y)$, sunt de forma [72,73,74]:

$$Z_{mn}(x,y) = A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) \right] \quad (2.61)$$

Coeficienții A_{mn} se calculează folosind dezvoltarea Fourier:

$$A_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) \right] dx dy \quad (2.62)$$

unde:

$$\int_0^a \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} dx = -\frac{a}{n \cdot \pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0; & \text{pentru } n - \text{par} \\ \frac{2a}{n \cdot \pi}; & \text{pentru } n - \text{impar} \end{cases} \quad (2.63)$$

$$\int_0^b \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) \right] dy = b \quad (2.64)$$

Rezultă că coeficienții A_{mn} sunt:

$$A_{mn} = \begin{cases} 0; & \text{pentru } m, n - \text{par} \\ \frac{8}{n \cdot \pi}; & \text{pentru } m, n - \text{impar} \end{cases} \quad (2.65)$$

Odată determinate pulsațiile proprii și funcțiile proprii se poate scrie expresia deplasării în vibrație după un mod propriu, de forma:

$$w_{mn}(x, y, t) = Z_{mn}(x, y) \sin(\omega_{mn}t + \theta_{mn}) = A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) \right] \sin(\omega_{mn}t + \theta_{mn}) \quad (2.66)$$

care se poate realiza doar în următoarele condiții inițiale [3,9, 72,73,74]:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) &= Z_{mn}(x, y) \sin \theta_{mn} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \omega_{mn} Z_{mn}(x, y) \cos \theta_{mn} = v_0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

În cazurile în care condițiile inițiale diferă de (2.67), mișcarea rezultată se exprimă printr-o suprapunere de moduri proprii [3,9,72,73,74]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{mn}(x, y) \sin(\omega_{mn}t + \theta_{mn}) \quad (2.67)$$

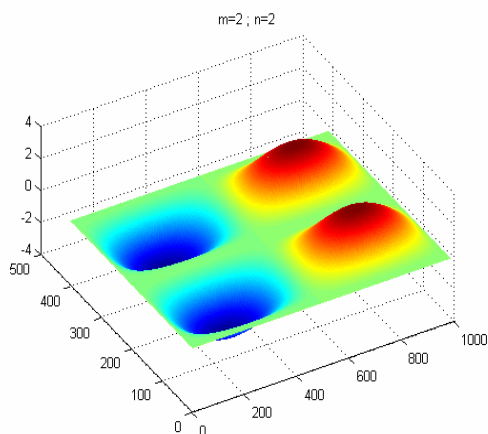
În continuare se prezintă valorile determinate analitic pentru o aceeași placă dreptunghiulară reală din oțel, cu laturile $a=430$ mm și $b=950$ mm, simplu rezemată pe două laturi paralele și încastrată pe celelalte două laturi. În acest caz s-au calculat cu programul Mathcad frecvențele proprii pentru $m=1...10$ și $n=1...10$ în tabelul 2.2.

Tabelul 2.2. Frecvențele obținute prin calcul analitic

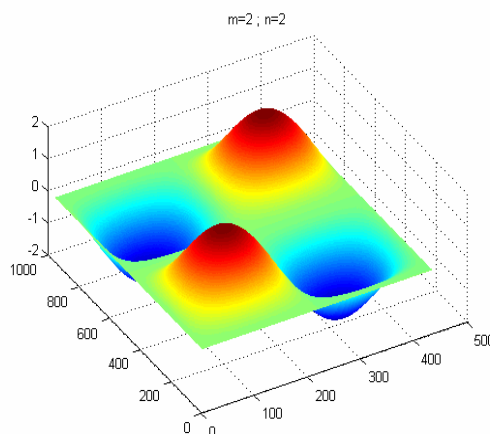
$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	1	2	3	4	5
1	36,423154	109,0348	230,0542	399,48137	617,3163
2	58,146304	130,75795	251,77735	421,20452	639,03945
3	90,731031	163,34267	284,36208	453,78925	671,62418
4	134,17733	206,78898	327,80838	497,23555	715,07048
5	188,48521	261,09685	382,11626	551,54343	769,37836
6	253,65466	326,26631	447,28571	616,71288	834,54781
7	329,68569	402,29733	523,31674	692,74391	910,57884
8	416,5783	489,18994	610,20934	779,63651	997,47144
9	514,33247	586,94412	707,96352	877,39069	1095,2256
10	622,94823	695,55987	816,57928	986,00645	1203,8414

Cu ajutorul programului MATLAB [90], s-au determinat formele proprii de vibrație pentru placa dreptunghiulară simplu rezemată pe două laturi paralele și încastrată pe celelalte două laturi, care sunt prezentate în figura 2.2.a, unde s-au folosit pasul de 0,005 și relația:

$$Z_{mn}(x, y) = \frac{8}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{a} \left[1 - \cos \left(\frac{2m\pi y}{b} \right) \right] \quad (2.69)$$



a) cu relația (2.69)



b) cu relația (2.69')

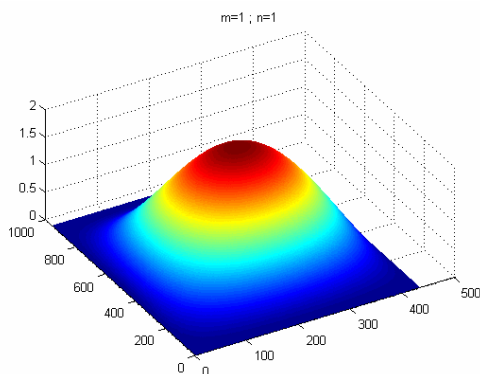
Fig. 2.2 Compararea formelor proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lungime) și încastrată pe celelalte două laturi (lățime)

Deoarece funcția $1 - \cos \left(\frac{2m\pi \cdot y}{b} \right)$ este pozitivă, se introduce funcția semn, astfel încât relația (2.69) devine:

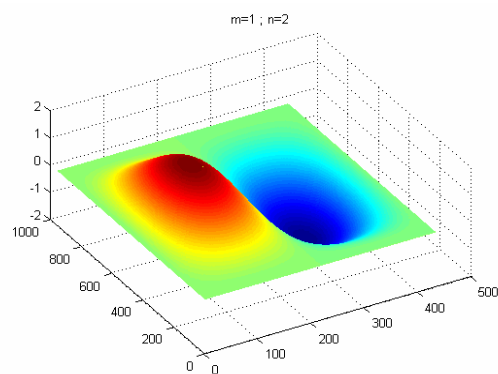
$$Z_{mn}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \cdot \text{sign} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{2my}{b} - 1 \right) \right] \right\} \left[1 - \cos \left(\frac{2m\pi y}{b} \right) \right] \quad (2.69')$$

Astfel, din figura 2.2. a) se observă că formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele și încastrată pe celelalte două laturi se determină cu relația (2.69').

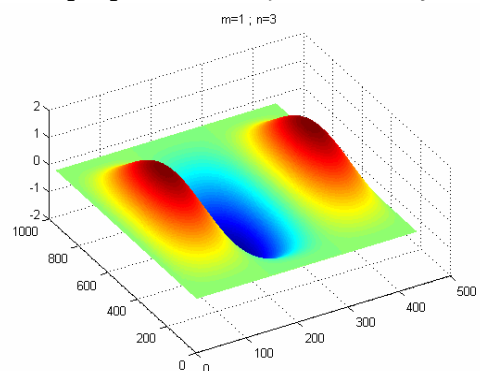
În figura 2.3. s-au determinat formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele și încastrată pe celelalte două laturi cu relația (2.69'), utilizând programul MATLAB și pasul de 0,005.



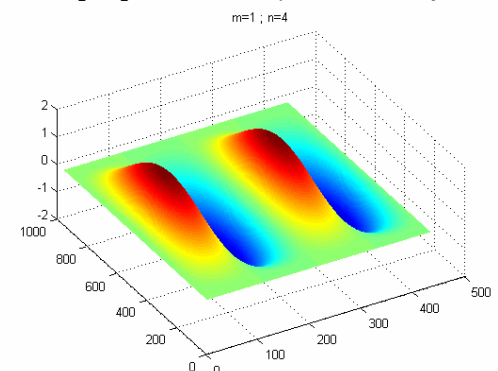
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=1$.



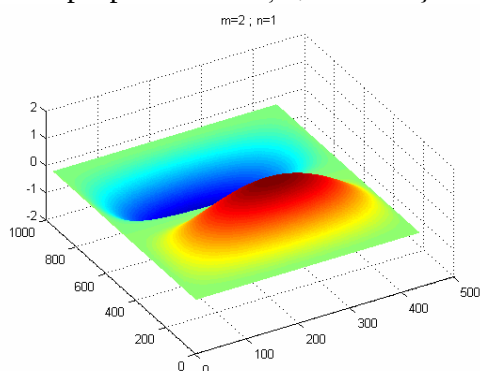
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=2$.



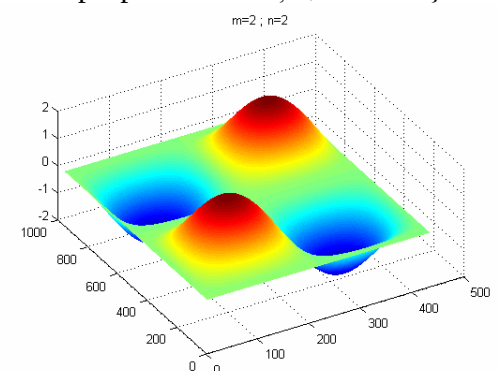
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=3$.



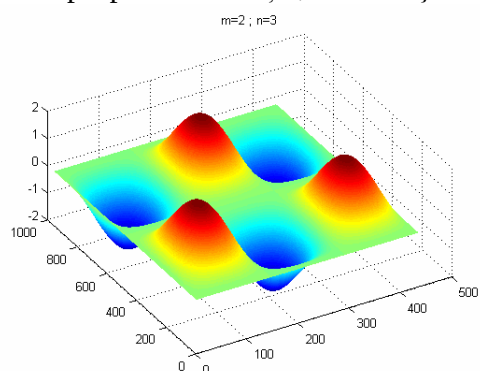
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=4$.



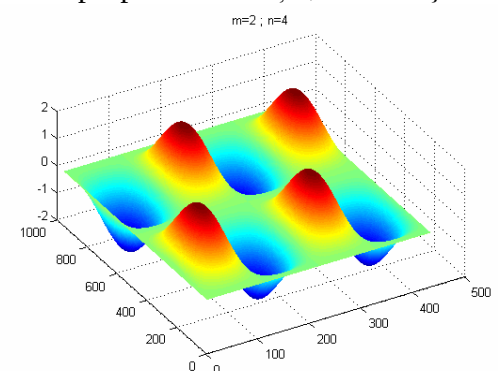
Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=2$.

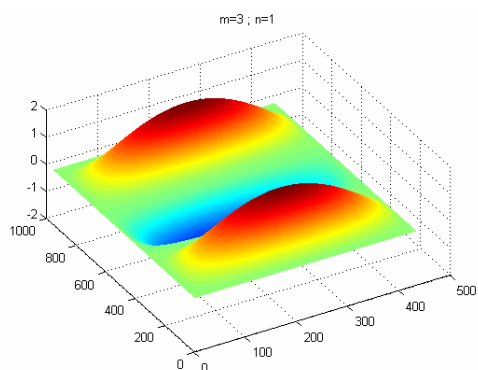


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=3$.

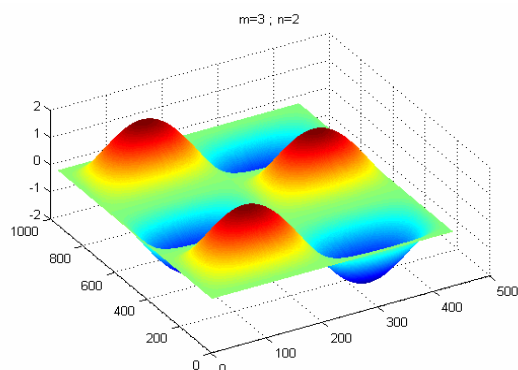


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=4$.

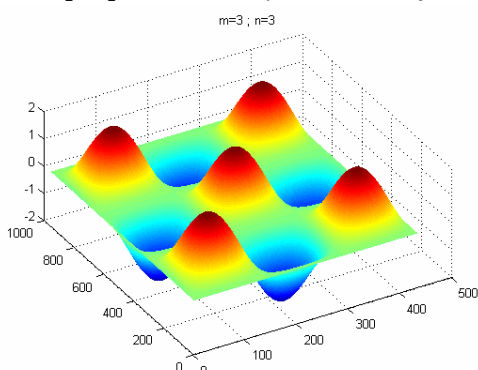
Fig. 2.3. Formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lungime) și încastrată pe celelalte două laturi (lățime)



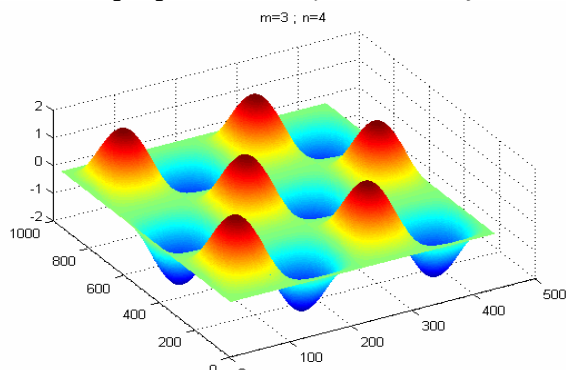
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=1$.



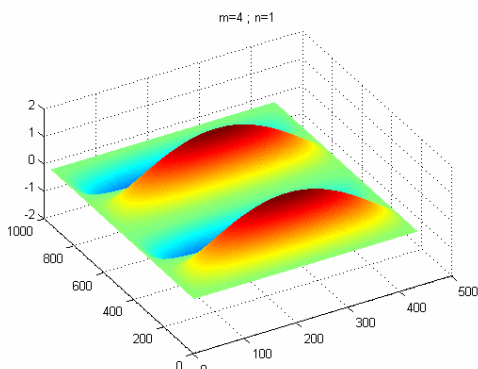
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=2$.



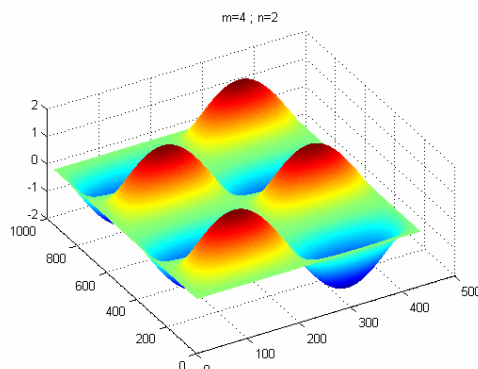
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=3$.



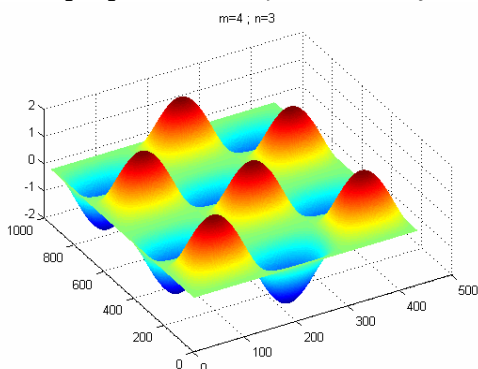
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=4$.



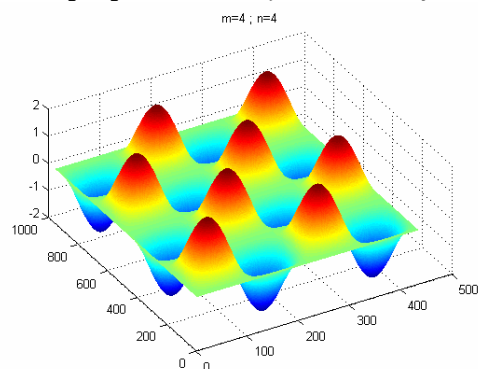
Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=2$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=3$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=4$.

Fig. 2.3. Formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lungime) și încastrată pe celelalte două laturi (lățime) continuare

2.4 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa simplu rezemată pe două laturi opuse și liberă pe celelalte două laturi

Situația simplu rezemat pe două laturi paralele a fost analizată în paragraful 2.2.1. Soluția generală a ecuației diferențiale (2.11), ca și în cazul anterior este o funcție de forma [3,9,72,73,74]:

$$Y_m(y) = A_m \cosh(\alpha_m y) + B_m \sinh(\alpha_m y) + C_m \cos(\beta_m y) + D_m \sin(\beta_m y) \quad (2.70)$$

unde:

$$\beta_m^2 = \lambda^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad \alpha_m^2 = \lambda^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad (2.71)$$

iar:

$$Z_{mn}(x, y) = Y_m(y) \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{b}\right), \text{ unde } n \in N^* \quad (2.72)$$

Se consideră o placă liberă pe lungime, având laturile $y=0$ și $y=a$ (tabel 1;c), pentru care momentul încovoiitor paralel cu latura, și forța tăietoare sunt nule. În acest caz, condițiile la limită sunt [3,9,72,73,74]:

$$a) \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{\substack{y=0 \\ y=a}} = 0$$

din această condiție rezultă:

$$\left[-Y_m(y) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + Y_m''(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \right]_{\substack{y=0 \\ y=a}} = 0 \quad (2.73)$$

$$b) \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 Z}{\partial y \partial x^2} \right)_{\substack{y=0 \\ y=a}} = 0$$

din această condiție rezultă :

$$\left[Y_m'''(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) - Y_m'(y) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \right]_{\substack{y=0 \\ y=a}} = 0 \quad (2.74)$$

Din cele două condiții la limită (2.73), respectiv (2.74) rezultă:

$$\begin{cases} Y_m''(0) = Y_m''(a) = 0 \\ Y_m'''(0) = Y_m'''(a) = 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

Derivata a doua a funcției (2.70) în raport cu y este:

$$Y_m''(y) = \alpha_m^2 A_m \cosh(\alpha_m y) + \alpha_m^2 B_m \sinh(\alpha_m y) - \beta_m^2 C_m \cos(\beta_m y) - \beta_m^2 D_m \sin(\beta_m y) \quad (2.76)$$

Derivata a treia a funcției (2.70) în raport cu y este:

$$Y_m'''(y) = \alpha_m^3 A_m \sinh(\alpha_m y) + \alpha_m^3 B_m \cosh(\alpha_m y) + \beta_m^3 C_m \sin(\beta_m y) - \beta_m^3 D_m \cos(\beta_m y) \quad (2.77)$$

Introducând condițiile la limită (2.75) în relațiile (2.76), respectiv (2.77), se obține sistemul liniar omogen cu necunoscutele A_m, B_m, C_m, D_m :

$$\begin{cases} \alpha_m^2 A_m - \beta_m^2 C_m = 0 \\ \alpha_m^2 A_m \cosh(\alpha_m a) + \alpha_m^2 B_m \sinh(\alpha_m a) - \beta_m^2 C_m \cos(\beta_m a) - \beta_m^2 D_m \sin(\beta_m a) = 0 \\ \alpha_m^3 B_m - \beta_m^3 D_m = 0 \\ \alpha_m^3 A_m \sinh(\alpha_m a) + \alpha_m^3 B_m \cosh(\alpha_m a) + \beta_m^3 C_m \sin(\beta_m a) - \beta_m^3 D_m \cos(\beta_m a) = 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

Dacă $\alpha_m = -\beta_m$, adică se consideră o soluție particulară periodică, atunci din prima și a treia ecuație a sistemului (2.78) rezultă:

$$A_m = C_m \text{ și } B_m = -D_m \quad (2.79)$$

Atunci sistemul (2.78) devine:

$$\begin{cases} \beta_m^2 C_m \cosh(\beta_m a) + \beta_m^2 D_m \sinh(\beta_m a) - \beta_m^2 C_m \cos(\beta_m a) - \beta_m^2 D_m \sin(\beta_m a) = 0 \\ \beta_m^3 C_m \sinh(\beta_m a) + \beta_m^3 D_m \cosh(\beta_m a) + \beta_m^3 C_m \sin(\beta_m a) - \beta_m^3 D_m \cos(\beta_m a) = 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

Punând condițiile ca sistemul (2.80) să admită și soluții diferite de soluția banală, se obține ecuația pulsațiilor proprii:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_m^2 [\cosh(\beta_m a) - \cos(\beta_m a)] & \beta_m^2 [\sinh(\beta_m a) - \sin(\beta_m a)] \\ \beta_m^3 [\sinh(\beta_m a) + \sin(\beta_m a)] & \beta_m^3 [\cosh(\beta_m a) - \cos(\beta_m a)] \end{vmatrix} = 0 \quad (2.81)$$

Rezolvând ecuația pulsațiilor proprii (2.81), se obține ecuația transcendentă:

$$2\beta_m^5 [1 - \cos(\beta_m a) \cdot \cosh(\beta_m a)] = 0 \quad (2.82)$$

Rezolvând ecuația transcendentă grafic (2.82), se obține o soluție aproximativă de forma:

$$\beta_m a = \frac{(2m-1) \cdot \pi}{2} \quad (2.83)$$

Pentru a obține o soluție „mai exactă”, se folosește procedura Newton-Rampson cu valoarea inițială:

$$\beta_m = \frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} \quad (2.84)$$

Pentru ca acest șir să convergă mai repede, conform procedurii Newton-Rampson se poate considera următoarea variantă:

$$\beta_m = \frac{1}{2} \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right] \quad (2.85)$$

În acest caz, pulsația proprie a mișcării este de forma:

$$\omega_{mn} = \lambda_{mn}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}} = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b} \right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}} \quad (2.86)$$

Din prima ecuație a sistemului (2.80) se determină coeficientul D_m în funcție de coeficientul C_m , de forma:

$$\begin{aligned} D_m &= \frac{\cosh(\beta_m \cdot a) - \cos(\beta_m \cdot a)}{\sin(\beta_m \cdot a) - \sinh(\beta_m \cdot a)} \cdot C_m = \\ &= \frac{\cosh \frac{1}{2} \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right] \cdot a - \cos \frac{1}{2} \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right] \cdot a}{\sin \frac{1}{2} \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right] \cdot a - \sinh \frac{1}{2} \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right] \cdot a} \cdot C_m \end{aligned} \quad (2.87)$$

Atunci soluția ecuației diferențiale (2.11) este de forma:

$$\begin{aligned} Y_m(y) &= C_m \cosh \frac{1}{2} \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right] \cdot y - D_m \sinh \frac{1}{2} \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right] \cdot y + \\ &C_m \cos \frac{1}{2} \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right] \cdot y + D_m \sin \frac{1}{2} \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot a} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot a} \right] \cdot y \end{aligned} \quad (2.88)$$

iar funcțiile proprii ale mișcării, $Z_{mn}(x,y)$, sunt de forma [3,9,72,73,74]:

$$Z_{mn}(x, y) = C_{mn} \sin \left(\frac{n \pi x}{a} \right) Y_m(y) \quad (2.89)$$

Coeficienții C_{mn} se calculează folosind dezvoltarea Fourier:

$$C_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^b \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} \right) \cdot Y_m(y) dx dy \quad (2.90)$$

$$\int_0^a \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{a} dx = -\frac{a}{n \cdot \pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0; & \text{pentru } n - \text{par} \\ \frac{2a}{n \cdot \pi}; & \text{pentru } n - \text{impar} \end{cases} \quad (2.91)$$

$$\int_0^b Y_m(y) dy = \frac{2b}{\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2} - \frac{\pi}{(2m-1)}} \quad (2.92)$$

Rezultă că coeficienții A_{mn} sunt de forma:

$$A_{mn} = \begin{cases} 0; & \text{pentru } n - \text{par} \\ \frac{8}{n \cdot \pi^2 \cdot \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2} - \frac{\pi}{(2m-1)} \right]}; & \text{pentru } n - \text{impar} \end{cases} \quad (2.93)$$

În continuare, se prezintă valorile determinate analitic pentru o placă dreptunghiulară reală din oțel având aceleași caracteristici mecanice și fizice, cu laturile $a= 450$ mm și

$b = 980$ mm, simplu rezemată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi. În acest caz, s-au calculat cu programul Mathcad frecvențele proprii pentru $m=1...10$ și $n=1...10$ în tabelul 2.3.

Tabelul 2.3. Frecvențele obținute prin calcul analitic

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	1	2	3	4	5
1	6,6161223	21,926262	47,443161	83,166819	129,09724
2	13,339423	28,649562	54,166461	89,890119	135,82054
3	37,113013	52,423152	77,940051	113,66371	159,59413
4	73,300285	88,610424	114,12732	149,85098	195,7814
5	121,65926	136,9694	162,4863	198,20996	244,14038
6	182,14427	197,45441	222,97131	258,69497	304,62538
7	254,74171	270,05185	295,56875	331,29241	377,22282
8	339,44638	354,75652	380,27342	415,99708	461,9275
9	436,25595	451,56609	477,08299	512,80665	558,73706
10	545,16924	560,47938	585,99628	621,71994	667,65035

Se observă că relația (2.88) este identică cu relația (2.88') de la bară pentru cazul liber-liber [12]:

$$Z_i(y) = \frac{\cosh \lambda_i - \cos \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} (\sin \lambda_i \cdot y + \sinh \lambda_i \cdot y) + \cos \lambda_i \cdot y + \cosh \lambda_i \cdot y \quad (2.88')$$

unde:

$$\lambda_i = \beta_m \cdot a \quad (2.88'')$$

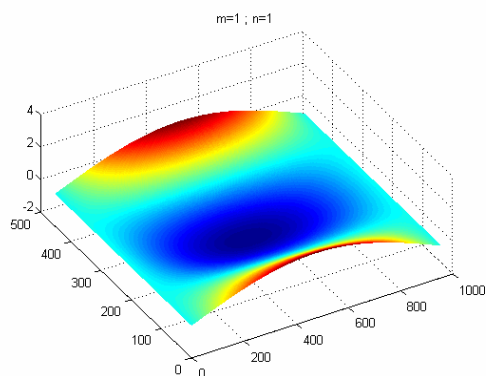
Formele proprii sunt de forma:

$$Z_{ij} = Z_i \cdot Z_j = Z_i \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{b}\right) \quad (2.88''')$$

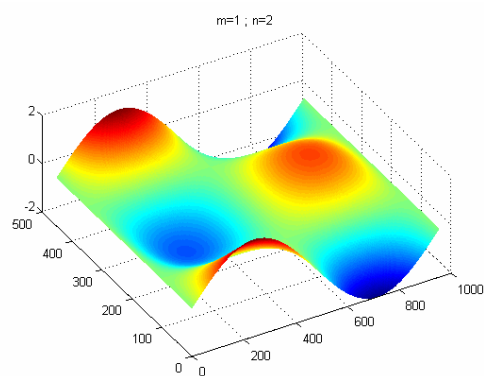
unde i și j reprezintă numărul de moduri.

Cu ajutorul programului MATLAB [90], s-au determinat formele proprii de vibrație pentru placa dreptunghiulară simplu rezemată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi, care sunt prezentate în figura 2.4., unde s-au folosit pasul de 0,005 și relația:

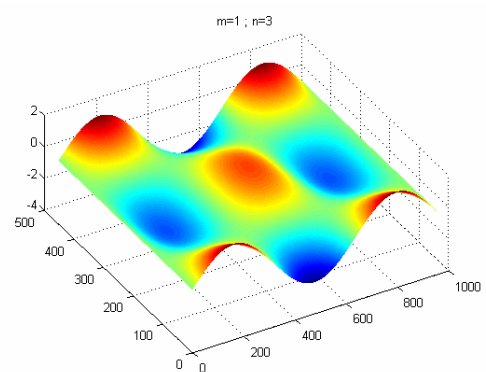
$$Z_{mn}(x, y) = \frac{8}{n \cdot \pi^2 \cdot \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2} - \frac{\pi}{(2m-1)} \right]} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) Y_m(y) \quad (2.94)$$



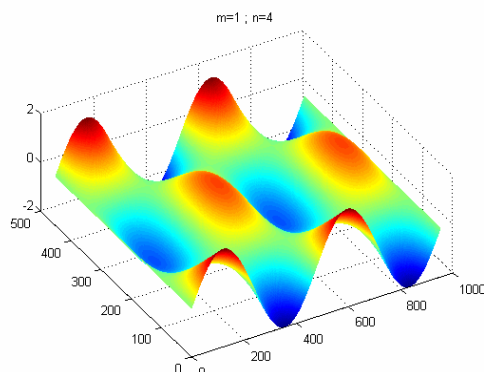
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=1$.



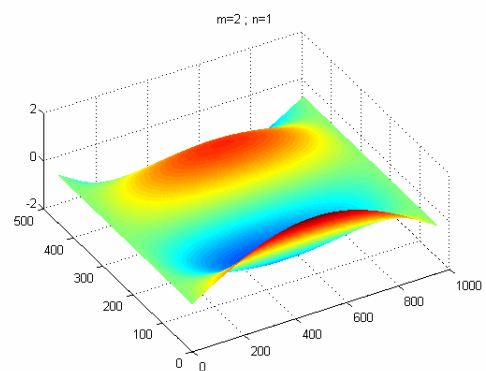
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=2$.



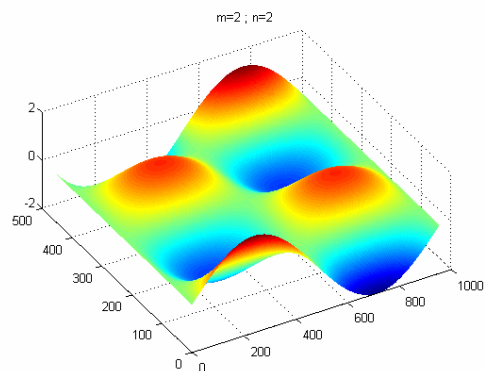
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=3$.



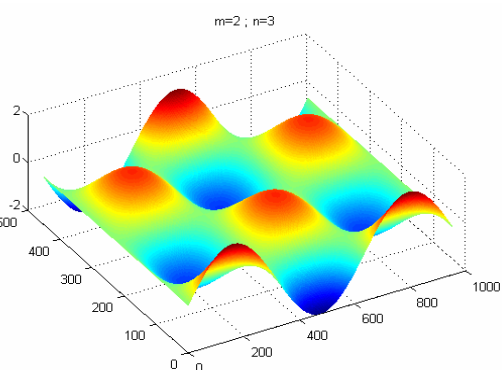
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=4$.



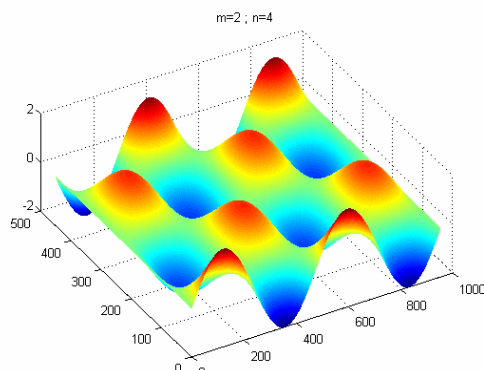
Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=2$.

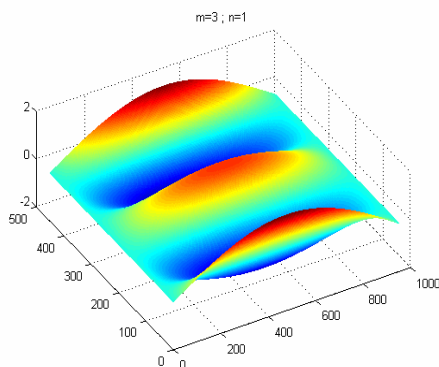


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=3$.

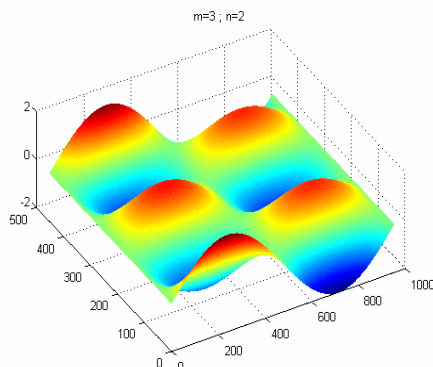


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=4$.

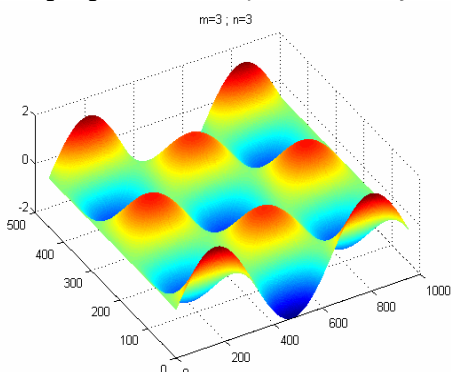
Fig. 2.4. Formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lățime) și liberă pe celelalte două laturi (lungime)



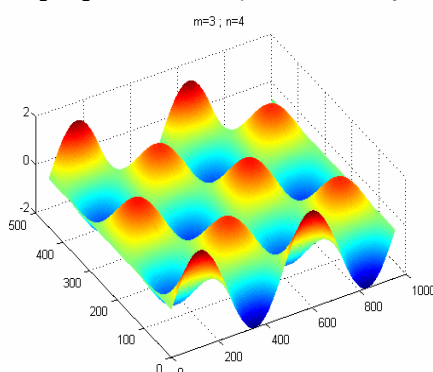
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=1$.



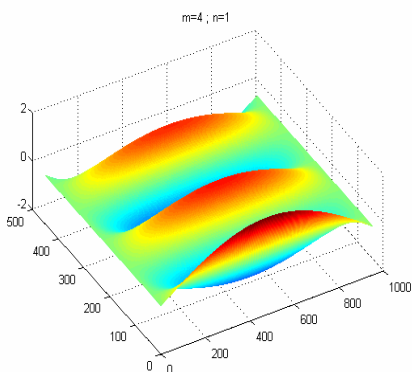
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=2$.



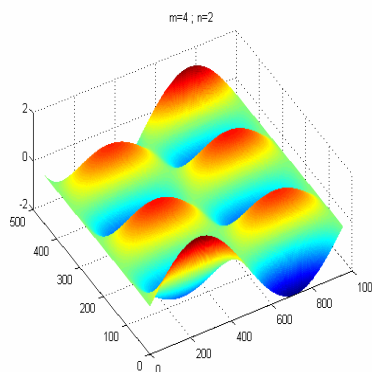
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=3$.



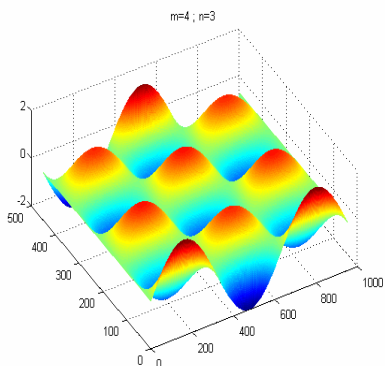
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=4$.



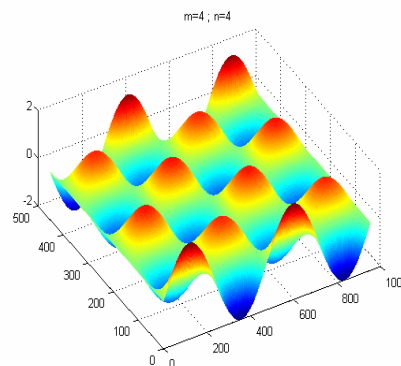
Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=2$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=3$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=4$.

Fig. 2.4. Formele proprii de vibrație pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lățime) și liberă pe celelalte două laturi (lungime) continue

2.5 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile

În cazul unei plăci dreptunghiulare încastrată pe două laturi paralele $x=0$ și $x=a$, funcția $Z_{mn}(x,y)$ de forma [3,9,72,73,74]:

$$Z_{mn}(x, y) = Y_m(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \text{ unde } n \in N^* \quad (2.95)$$

satisface următoarele condiții la limită :

$$Z(0, y) = 0; \quad Z(a, y) = Y_m(y) \sin n\pi = 0, \quad n \in N^* \quad (2.96)$$

Derivând pe Z în raport cu x se obține:

$$Z'_x = Y_m(y) \left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (2.97)$$

Din această ecuație se observă că:

$$Z'_x(0, y) \neq 0 \text{ și } Z'_x(a, y) \neq 0 \quad (2.98)$$

adică nu satisface următoarele condiții la limită:

$$Z'_x(0, y) = Z'_x(a, y) = 0 \quad (2.99)$$

unde: Z'_x - reprezintă derivata lui Z în raport cu x .

În acest caz, conform paragrafului 2.3, funcția $Z_{mn}(x,y)$ se alege de forma [72,73,74]:

$$Z(x, y) = Y_m(y) \left[\cos\left(\frac{2m\pi}{a}\right)x - 1 \right] \quad (2.100)$$

iar derivata lui Z în raport cu x este de forma:

$$Z'_x = Y_m(y) \left(\frac{n\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (2.101)$$

care satisface următoarele condițiile la limită:

$$Z(x, 0) = Z(x, b) = 0 \quad (2.102)$$

și:

$$Z'_x(x, 0) = Z'_x(x, b) = 0 \quad (2.103)$$

Derivata de ordinul unu a lui Z în raport cu x este:

$$Z'_x = Y_m(y) \left(\frac{n\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (2.104)$$

Derivata a doua a lui Z în raport cu x este:

$$Z''_x = -Y_m(y) \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \quad (2.105)$$

Derivata a treia a lui Z în raport cu x este:

$$Z_x''' = Y_m(y) \left(\frac{2n\pi}{a} \right)^3 \sin \left(\frac{2n\pi x}{a} \right) \quad (2.106)$$

Derivata a patra a lui Z în raport cu x este:

$$Z_x'''' = Y_m(y) \left(\frac{2n\pi}{a} \right)^4 \cos \left(\frac{2n\pi x}{a} \right) \quad (2.107)$$

Derivata întâia a lui Z în raport cu y este:

$$Z_y'(x, y) = Y_m'(y) \left[\cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - 1 \right] \quad (2.108)$$

Derivata a doua a lui Z în raport cu y este:

$$Z_y''(x, y) = Y_m''(y) \left[\cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - 1 \right] \quad (2.109)$$

Derivata a treia a lui Z în raport cu y este:

$$Z_y'''(x, y) = Y_m'''(y) \left[\cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - 1 \right] \quad (2.110)$$

Derivata a patra a lui Z în raport cu y este:

$$Z_y''''(x, y) = Y_m''''(y) \left[\cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - 1 \right] \quad (2.111)$$

Derivata a patra a lui Z în raport cu x și y este:

$$\frac{d^4 Z}{dx^2 dy^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 Z}{dy^2} \right) = \frac{d^2}{dx^2} \left[y^{4(y)} \left[\cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - 1 \right] \right] = - \left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 y^{4(y)} \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) \quad (2.112)$$

Înlocuind (2.107), (2.111) și (2.112) în ecuația diferențială de ordinul patru (2.6), se obține ecuația diferențială neliniară de forma:

$$y^{IV(y)} \left[\cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - 1 \right] - 2 \left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 y^{4(y)} \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) + \left(\frac{2n\pi}{a} \right)^4 y^{(y)} \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - \lambda^4 y^{(y)} \left[\cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - 1 \right] = 0 \quad (2.113)$$

$$y^{IV(y)} \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - 2 \left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) y'' + y^{(y)} \left[\left(\frac{2n\pi}{a} \right)^4 - \lambda^4 \right] \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) + \lambda^4 y^{(y)} - y^{IV(y)} = 0 \quad (2.114)$$

Separând termenii obținem:

$$\left\{ y^{IV} - 2 \left(\frac{2n\pi}{a} \right)^2 y'' + \left[\left(\frac{2n\pi}{a} \right)^4 - \lambda^4 \right] y \right\} \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - [y^{IV(y)} - \lambda^4 x] = 0 \quad (2.115)$$

O soluție particulară a ecuației de mai sus se obține punând condiția ca expresia din acoladă (primul termen) să fie zero și expresia din paranteza dreaptă (al doilea termen) să fie de asemenea zero. Astfel avem:

- egalând cu zero termenul al doilea se obține:

$$r^4 - \lambda^4 = 0 \Rightarrow r^2 = \pm \lambda^2 \quad (2.116)$$

de unde se obțin soluțiile, de forma:

$$\begin{aligned} r^2 = \lambda^2 &\Rightarrow r_{1,2} = \pm \lambda \\ r^2 = -\lambda^2 &\Rightarrow r_{3,4} = \pm i\lambda \end{aligned} \quad (2.117)$$

- egalând cu zero primul termen se obține:

$$r^4 - 2\left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2 r^2 + \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^4 - \lambda^4 = 0 \quad (2.118)$$

$$\Delta = 4 \cdot \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2 - 4 \cdot \left[\left(\frac{2n\pi}{a}\right)^4 - \lambda^4\right] = 4 \cdot \lambda^4$$

$$r^2 = \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2 \pm \lambda^2 \quad (2.119)$$

Soluțiile ecuației (2.118) sunt de forma:

$$r_{5,6} = \pm \sqrt{\left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2 + \lambda^2} \quad (2.120)$$

și:

$$r_{7,8} = \pm \sqrt{\left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2 - \lambda^2} = \pm i \cdot \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2} \quad (2.121)$$

Soluția particulară a ecuației caracteristice se obține punând condiția ca ea să verifice ambele relații (primul și al doilea termen egali cu zero), adică să fie soluție comună. Singura soluție comună care verifică ambii termeni din ecuația diferențială (2.115) se obține pentru:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2 \quad (2.122)$$

Folosind notațiile:

$$\beta_m^2 = \lambda^2 - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad \alpha_m^2 = \lambda^2 \text{ și } \beta_{m_1}^2 = \lambda^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad \alpha_{m_1}^2 = -\lambda^2 \quad (2.123)$$

Pe baza soluțiilor anterioare, se poate dezvolta pentru ecuația diferențială (2.115) următoarea soluție:

$$Y_m(y) = A_m \cosh(\alpha_m y) + B_m \sinh(\alpha_m y) + C_m \cos(\beta_m y) + D_m \sin(\beta_m y) \quad (2.124)$$

Se consideră o placă încastrată pe laturile $y=0$ și $y=b$ (tabel 1;d), pentru care săgeata și rotirea într-un plan perpendicular pe latură sunt nule. În acest caz, condițiile la limită sunt [3,9,72,73,74]:

$$a) Z(x,0) = Z(x,b) = 0$$

din această condiție rezultă :

$$Y_m(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = Y_m(b) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = 0, \text{ adică } Y_m(0) = Y_m(b) = 0 \quad (2.125)$$

$$b) Z'_y(x,y) = Y'_m(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

din această condiție rezultă :

$$Z'_y(x,0) = Z'_y(x,b) = 0, \text{ adică } Y'_m(0) = Y'_m(b) = 0 \quad (2.126)$$

Derivata de ordinul unu a lui Y_m în raport cu y este:

$$Y'_m(y) = \alpha_m A_m \sinh(\alpha_m y) + \alpha_m B_m \cosh(\alpha_m y) - \beta_m C_m \sin(\beta_m y) + \beta_m D_m \cos(\beta_m y) \quad (2.127)$$

Introducând condiția la limită (2.125) în funcția (2.124), de asemenea introducând condiția la limită (2.126) în derivata funcției în raport cu y (2.127), se obține sistemul liniar omogen cu necunoscutele A_m, B_m, C_m, D_m de forma:

$$\begin{cases} A_m + C_m = 0 \\ A_m \cosh(\alpha_m b) + B_m \sinh(\alpha_m b) + C_m \cos(\beta_m b) + D_m \sin(\beta_m b) = 0 \\ \alpha_m B_m + \beta_m D_m = 0 \\ \alpha_m A_m \sinh(\alpha_m b) + \alpha_m B_m \cosh(\alpha_m b) - \beta_m C_m \sin(\beta_m b) + \beta_m D_m \cos(\beta_m b) = 0 \end{cases} \quad (2.128)$$

Din prima ecuație a sistemului (2.128) rezultă:

$$A_m = -C_m \text{ sau } C_m = -A_m \quad (2.129)$$

Se consideră o soluție particulară de forma $\alpha_m = 0$. Atunci din a treia ecuație a sistemului rezultă:

$$D_m = 0 \quad (2.130)$$

Înlocuind rezultatele (2.129), respectiv (2.130) în a doua și a patra ecuație a sistemului (2.128), se obține sistemul:

$$\begin{cases} -C_m + C_m \cos(\beta_m b) = 0 \\ -\beta_m C_m \sin(\beta_m b) = 0 \end{cases} \quad (2.131)$$

Din cele două ecuații ale sistemului rezultă:

$$\cos(\beta_m b) = 1 \text{ sau } \sin(\beta_m b) = 0 \quad (2.132)$$

Soluția lor comună este:

$$\beta_m = \frac{2m\pi}{b} \quad (2.133)$$

Din expresia (2.133), rezultă că pentru fiecare valoare naturală nenulă a lui m există o infinitate de valori ale argumentului $\beta_m \cdot b$.

Ridicând la pătrat expresia (2.133), se obține:

$$\beta_m^2 = \frac{4m^2 \pi^2}{b^2} \quad (2.134)$$

Introducând valoarea lui β_m^2 în notația (2.123) se obține ecuația de pulsații proprii, de forma:

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{4m^2}{b^2} + \frac{4n^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 4\pi^2 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho \cdot h}} \quad (2.135)$$

Din relația (2.135) se observă că există o dublă infinitate de pulsații proprii cu care placa poate executa vibrații armonice libere.

În acest caz, funcțiile proprii ale mișcării, $Z_{mn}(x,y)$, sunt de forma [72,73,74]:

$$Z_{mn}(x,y) = C_{mn} \left[\cos\left(\frac{2n\pi}{a}\right)x - 1 \right] \left[\cos\left(\frac{2m\pi}{b}\right)y - 1 \right] \quad (2.136)$$

sau:

$$Z_{mn}(x,y) = A_{mn} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}\right)x \right] \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{b}\right)y \right] \quad (2.137)$$

Coeficienții A_{mn} se calculează folosind dezvoltarea Fourier:

$$A_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^b \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}\right)x \right] \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{b}\right)y \right] dx dy \quad (2.138)$$

unde:

$$\int_0^a \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \right] dx = a \quad (2.139)$$

$$\int_0^b \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) \right] dy = b \quad (2.140)$$

Rezultă că coeficienții A_{mn} sunt:

$$A_{mn} = 4 \quad (2.141)$$

Odată determinate pulsațiile proprii și funcțiile proprii, se poate scrie expresia deplasării în vibrație după un mod propriu :

$$w_{mn}(x, y, t) = Z_{mn}(x, y) \sin(\omega_{mn} t + \theta_{mn}) = C_{mn} \left[\cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) - 1 \right] \cdot \left[\cos\left(\frac{2m\pi y}{b}\right) - 1 \right] \sin(\omega_{mn} t + \theta_{mn}) \quad (2.142)$$

care se poate realiza doar în următoarele condiții inițiale [3,9,72,73,74]:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) &= Z_{mn}(x, y) \sin \theta_{mn} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \omega_{mn} Z_{mn}(x, y) \cos \theta_{mn} = v_0 \end{aligned} \quad (2.143)$$

În cazurile în care condițiile inițiale diferă de (2.138), mișcarea rezultată se exprimă printr-o suprapunere de moduri proprii [3,9,72,73,74]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{mn}(x, y) \sin(\omega_{mn} t + \theta_{mn}) \quad (2.144)$$

Indicele m corespunde numărului de ventre pe direcția Ox a laturii a, iar n corespunde numărului de ventre pe direcția Oy pe care se află latura b.

Nodul fundamental de vibrație a plăcii dreptunghiulare încastrată pe toate laturile corespunde valorilor $m=1$ și $n=1$, fiind caracterizat de pulsația proprie ω_{11} și forma proprie Z_{11} , exprimate prin relațiile particulare:

$$\omega_{11} = \pi^2 \left(\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \text{ și } Z_{11} = C_{11} \left[\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - 1 \right] \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) - 1 \right] \quad (2.145)$$

unde: $C_{11} = 1$ deoarece valorile sunt normalizate.

În continuare se prezintă valorile determinate analitic pentru o placă dreptunghiulară reală din oțel cu aceleași caracteristici mecanice și fizice, cu laturile $a= 400$ mm și $b= 950$ mm, simplu rezemată pe două laturi paralele și încastrată pe celelalte două laturi. În acest caz, s-au calculat cu programul Mathcad frecvențele proprii pentru $m=1...10$ și $n=1...10$ în tabelul 2.4.

Deoarece funcția $1 - \cos\left(\frac{2m\pi \cdot y}{b}\right)$ este pozitivă, ca și în cazul SR-ÎÎ se introduce

funcția semn, astfel încât relația (2.137) devine:

$$Z_{mn}(x, y) = \text{sign} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{2my}{b} - 1 \right) \right] \right\} \left[1 - \cos \left(\frac{2m\pi y}{b} \right) \right] \text{sign} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{2nx}{a} - 1 \right) \right] \right\} \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi x}{a} \right) \right] \quad (2.147)$$

Tabelul 2.4. Frecvențele obținute prin calcul analitic

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	1	2	3	4	5
1	78,143606	203,67575	387,47398	632,53827	667,79753
2	92,86676	225,39891	409,19713	654,26142	683,10767
3	115,45148	257,98363	441,78185	686,84615	708,62457
4	158,89779	301,42993	485,22816	730,29245	744,34823
5	213,20566	345,73781	539,53603	784,60033	790,27864
6	268,37512	410,90726	604,70549	849,76978	846,41582
7	344,40614	466,93829	680,73651	925,80081	912,75976
8	431,29875	563,8309	767,62912	1012,6934	989,31046
9	529,05293	681,58507	865,3833	1110,4476	1076,0679
10	637,66868	790,20083	973,99905	1219,0633	1173,0321

Cu formula (2.137) se obțin funcții periodice care, la trecerea prin 0, imită încastrarea, ca și la capete, conform figurii (2.5.).

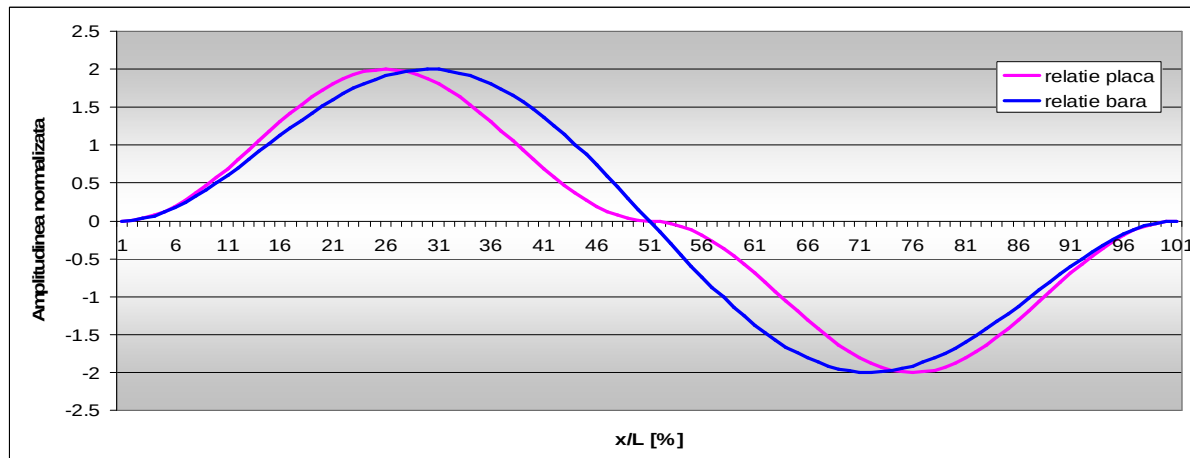
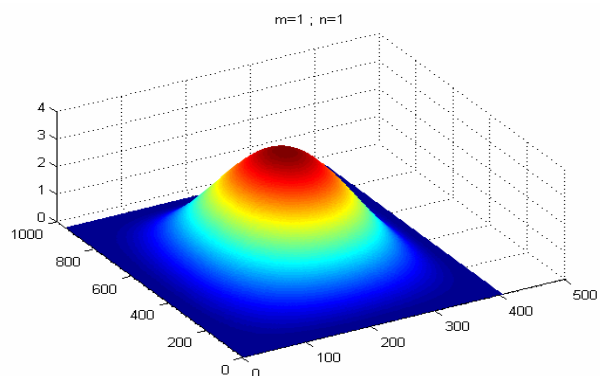


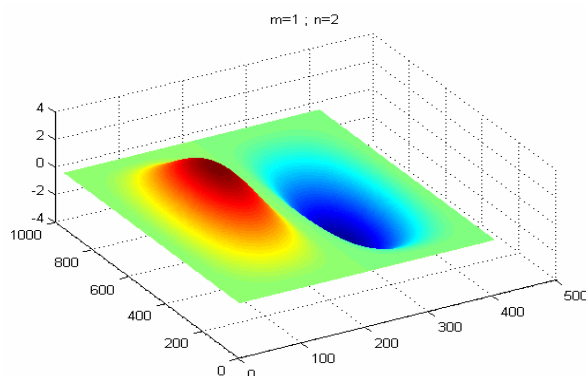
Fig. 2.5. Forma proprie pentru Modul 2, pentru cele două relații deduse

Similar cu cazul laturilor libere, se poate utiliza relația (2.147^{ll}), dedusă ca și în cazul barei încastrate la capete [12]. În acest caz obținem o curbă mai credibilă din punct de vedere fizic, reprezentată în figura 2.5.

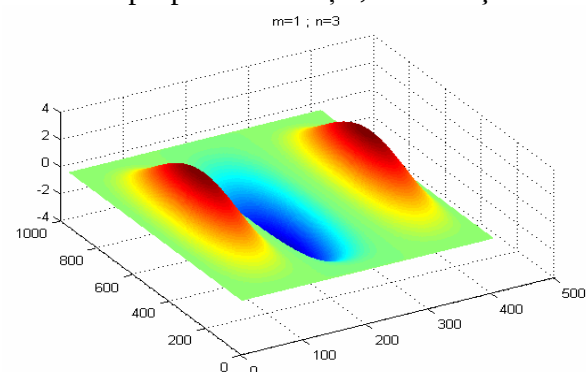
$$Z(x) = \frac{\cosh \lambda_j - \cos \lambda_j}{\sin \lambda_j - \sinh \lambda_j} (-\sin \lambda_j \cdot x + \sinh \lambda_j \cdot x) - \cos \lambda_j \cdot x + \cosh \lambda_j \cdot x \quad (2.147^{ll})$$



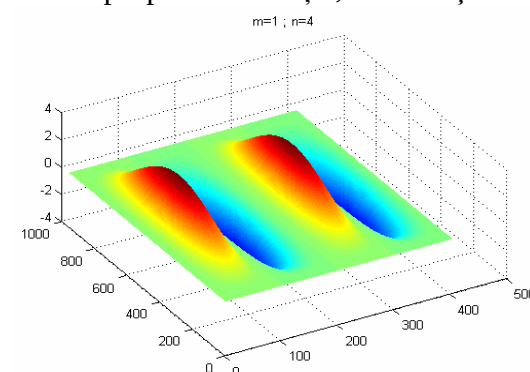
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=1$.



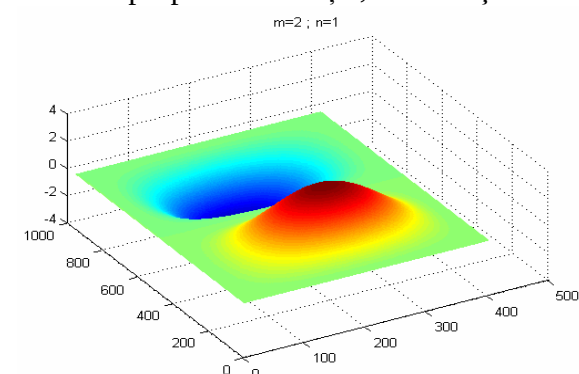
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=2$.



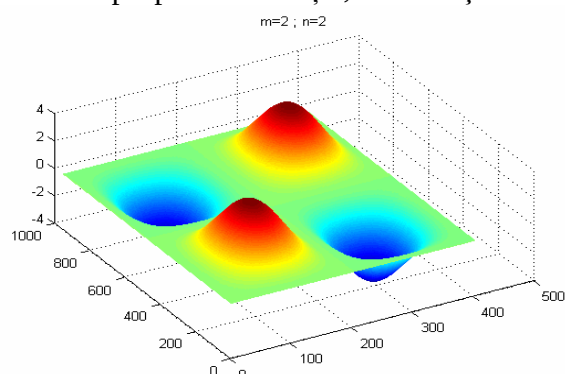
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=3$.



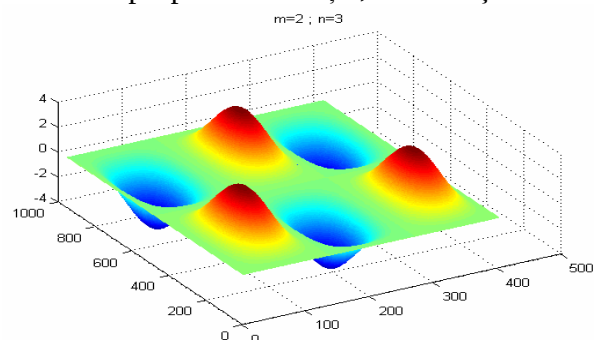
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=4$.



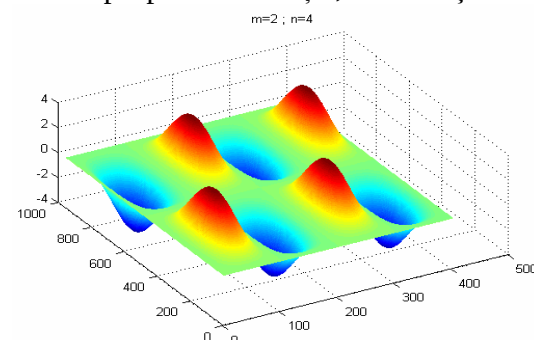
Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=2$.

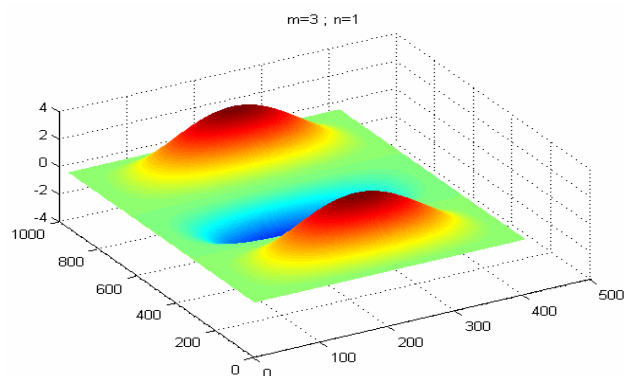


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=3$.

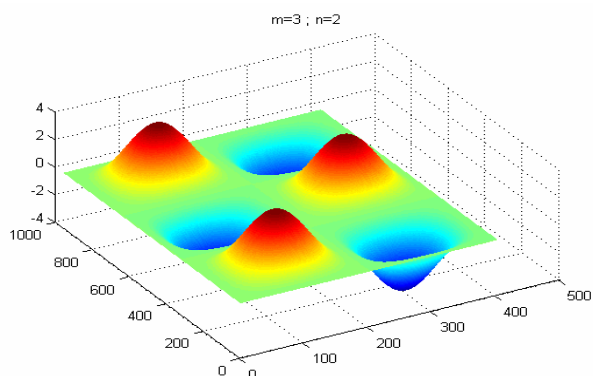


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=4$.

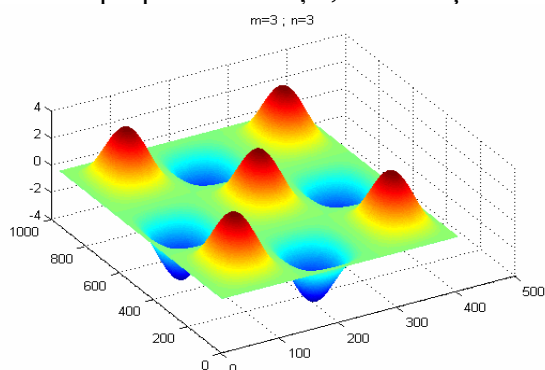
Fig. 2.6. Formele proprii de vibrație pentru placa încadrată pe toate laturile



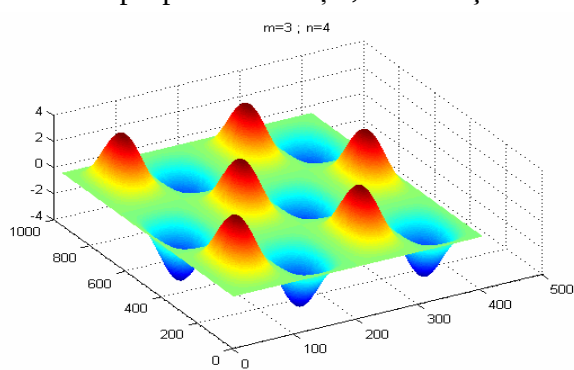
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=1$.



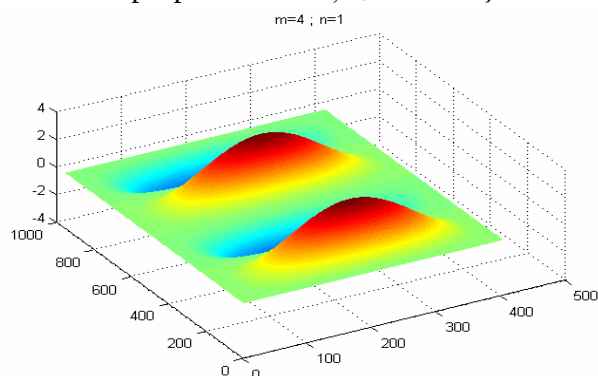
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=2$.



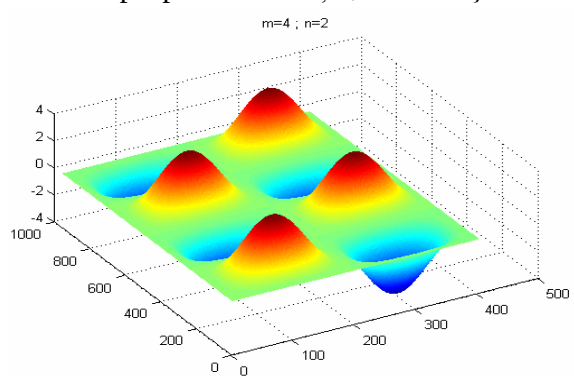
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=3$.



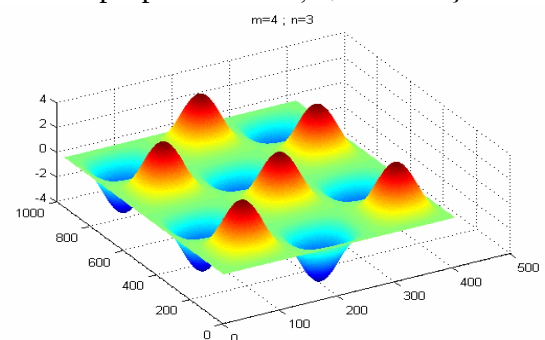
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=4$.



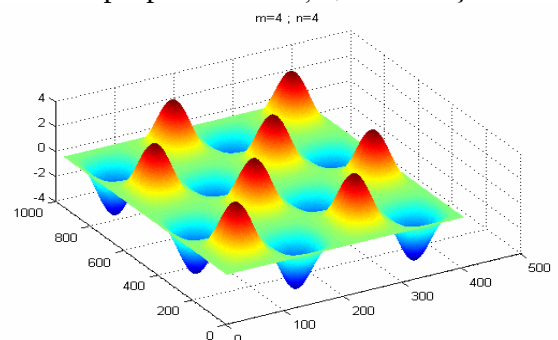
Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=2$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=3$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=4$.

Fig. 2.6. Formele proprii de vibrație pentru placa încastrată pe toate laturile (continuare)

$$Z(y) = \frac{\cosh \lambda_i - \cos \lambda_i}{\sin \lambda_i - \sinh \lambda_i} (-\sin \lambda_i \cdot y + \sinh \lambda_i \cdot y) - \cos \lambda_i \cdot y + \cosh \lambda_i \cdot y \quad (2.147^{III})$$

unde:

$$\lambda_i = \beta_m \cdot b \text{ și } \lambda_j = \beta_n \cdot a \quad (2.134^b)$$

Formele proprii sunt de forma:

$$Z_{ij} = Z_i(x) \cdot Z_j(z) \quad (2.147^{III})$$

unde i și j reprezintă numărul de moduri.

Se observă că în zona în care avem deplasări verticale ce se mențin în jurul poziției de echilibru se regăsesc tensiuni mecanice induse artificial din cauza condițiilor de limită. În urma analizei cu element finit se va determina relația cea mai potrivită.

2.6 Determinarea frecvențelor proprii și a funcțiilor proprii pentru placa încastrată pe două laturi opuse și liberă pe celelalte două laturi

Situația încastrat pe două laturi paralele a fost analizată în paragraful 2.2.4. Soluția generală a ecuației diferențiale (2.11), ca și în cazul anterior, este o funcție de forma [3,9, 72,73,74]:

$$Y_m(y) = A_m \cosh(\alpha_m y) + B_m \sinh(\alpha_m y) + C_m \cos(\beta_m y) + D_m \sin(\beta_m y) \quad (2.147)$$

Dacă placa este liberă pe lungime, laturile $y=0$ și $y=b$ (fig.1;c), pentru care momentul încovoietor M , paralel cu latura și forța tăietoare sunt nule, condițiile la limită sunt:

$$a) \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)_{y=0}^{y=b} = 0, \text{ rezultă că:}$$

$$\left[-Y_m(y) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) + Y_m''(y) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \right]_{y=0}^{y=b} = 0 \quad (2.148)$$

$$b) \left(\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 Z}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=0}^{y=b} = 0, \text{ rezultă că:}$$

$$\left[Y_m'''(y) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) - Y_m'(y) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \right]_{y=0}^{y=b} = 0 \quad (2.149)$$

Din cele două condiții la limită (2.148) și (2.149) rezultă:

$$\begin{cases} Y_m''(0) = Y_m''(b) = 0 \\ Y_m'''(0) = Y_m'''(b) = 0 \end{cases} \quad (2.150)$$

Derivata a doua a funcției (2.147) în raport cu y este:

$$Y_m''(y) = \alpha_m^2 A_m \cosh(\alpha_m y) + \alpha_m^2 B_m \sinh(\alpha_m y) - \beta_m^2 C_m \cos(\beta_m y) - \beta_m^2 D_m \sin(\beta_m y) \quad (2.151)$$

Derivata a treia a funcției (2.147) în raport cu y este:

$$Y_m'''(y) = \alpha_m^3 A_m \sinh(\alpha_m y) + \alpha_m^3 B_m \cosh(\alpha_m y) + \beta_m^3 C_m \sin(\beta_m y) - \beta_m^3 D_m \cos(\beta_m y) \quad (2.152)$$

Introducând condițiile (2.150) în ecuațiile (2.151), respectiv (2.152), rezultă sistemul liniar omogen cu necunoscutele A_m, B_m, C_m, D_m :

$$\begin{cases} \alpha_m^2 A_m - \beta_m^2 C_m = 0 \\ \alpha_m^2 A_m \cosh(\alpha_m b) + \alpha_m^2 B_m \sinh(\alpha_m b) - \beta_m^2 C_m \cos(\beta_m b) - \beta_m^2 D_m \sin(\beta_m b) = 0 \\ \alpha_m^3 B_m - \beta_m^3 D_m = 0 \\ \alpha_m^3 A_m \sinh(\alpha_m b) + \alpha_m^3 B_m \cosh(\alpha_m b) + \beta_m^3 C_m \sin(\beta_m b) - \beta_m^3 D_m \cos(\beta_m b) = 0 \end{cases} \quad (2.153)$$

Dacă $\alpha_m = -\beta_m$, adică se consideră o soluție particulară periodică, atunci din prima și a treia ecuație a sistemului (2.153) rezultă:

$$A_m = C_m \text{ și } B_m = -D_m \quad (2.154)$$

Înlocuind rezultatele (2.154) în sistemul (2.153), se obține:

$$\begin{cases} \beta_m^2 C_m \cosh(\beta_m b) + \beta_m^2 D_m \sinh(\beta_m b) - \beta_m^2 C_m \cos(\beta_m b) - \beta_m^2 D_m \sin(\beta_m b) = 0 \\ \beta_m^3 C_m \sinh(\beta_m b) + \beta_m^3 D_m \cosh(\beta_m b) + \beta_m^3 C_m \sin(\beta_m b) - \beta_m^3 D_m \cos(\beta_m b) = 0 \end{cases} \quad (2.155)$$

Punând condițiile ca sistemul (2.155) să admită și soluții diferite de soluția banală, se obține ecuația pulsațiilor proprii:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_m^2 [\cosh(\beta_m b) - \cos(\beta_m b)] & \beta_m^2 [\sinh(\beta_m b) - \sin(\beta_m b)] \\ \beta_m^3 [\sinh(\beta_m b) + \sin(\beta_m b)] & \beta_m^3 [\cosh(\beta_m b) - \cos(\beta_m b)] \end{vmatrix} = 0 \quad (2.156)$$

Rezolvând ecuația pulsațiilor proprii (2.156) se obține ecuația transcendentă:

$$2\beta_m^5 [1 - \cos(\beta_m b) \cdot \cosh(\beta_m b)] = 0 \quad (2.157)$$

Rezolvând ecuația transcendentă grafic (2.157), se obține o soluție aproximativă de forma:

$$\beta_m b = \frac{(2m-1) \cdot \pi}{2} \quad (2.158)$$

Pentru a obține o soluție „mai exactă”, se folosește procedura Newton-Rampson cu valoarea inițială:

$$\beta_m = \frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} \quad (2.159)$$

Pentru ca acest șir să convergă mai repede, conform procedurii Newton-Rampson se poate considera următoarea variantă:

$$\beta_m = \frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \quad (2.160)$$

Rezultă că pulsația proprie a mișcării în acest caz este de forma:

$$\omega_{mn} = \lambda_{mn}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \pi^2 \left[\left(\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \right)^2 + \frac{n^2}{a^2} \right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (2.161)$$

Din prima ecuație a sistemului (2.155), se determină coeficientul D_m în funcție de coeficientul C_m , de forma:

$$\begin{aligned} D_m &= \frac{\cosh(\beta_m \cdot b) - \cos(\beta_m \cdot b)}{\sin(\beta_m \cdot b) - \sinh(\beta_m \cdot b)} \cdot C_m = \\ &= \frac{\cosh \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \right] \cdot b - \cos \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \right] \cdot b}{\sin \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \right] \cdot b - \sinh \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \right] \cdot b} \cdot C_m \end{aligned} \quad (2.162)$$

Atunci soluția ecuației diferențiale (2.147) este de forma:

$$\begin{aligned} Y_m(y) &= C_m \cosh \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \right] \cdot y - D_m \sinh \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \right] \cdot y + \\ &C_m \cos \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \right] \cdot y + D_m \sin \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2 \cdot b} - \frac{\pi}{(2 \cdot m - 1) \cdot b} \right] \cdot y \end{aligned} \quad (2.163)$$

iar funcțiile proprii ale mișcării, $Z_{mn}(x,y)$, sunt de forma:

$$Z_{mn}(x, y) = C_{mn} \left[\cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) - 1 \right] Y_m(y) \quad (2.164)$$

sau:

$$Z_{mn}(x, y) = A_{mn} \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) \right] Y_m(y) \quad (2.165)$$

Coeficienții A_{mn} se calculează folosind dezvoltarea în serie Fourier:

$$A_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^a \int_0^b \left[1 - \cos \left(\frac{2n\pi}{a} x \right) \right] \cdot Y_m(y) dx dy \quad (2.166)$$

$$\int_0^a \left[1 - \cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \right] dx = a \quad (2.167)$$

$$\int_0^b Y_m(y) dy = \frac{4b}{\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2} - \frac{\pi}{(2m-1)}} \quad (2.168)$$

Rezultă că coeficienții A_{mn} sunt de forma:

$$A_{mn} = \begin{cases} 0; & \text{pentru } m, n - \text{par} \\ \frac{16}{n \cdot \pi^2 \cdot \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2} - \frac{\pi}{(2m-1)} \right]}; & \text{pentru } m \in N^*, n - \text{impar} \end{cases} \quad (2.169)$$

În acest caz, funcțiile proprii ale mișcării, $Z_{mn}(x,y)$, sunt de forma:

$$Z_{mn}(x, y) = \sum_{m,n=1} A_{mn} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \right] Y_m(y) \quad (2.170)$$

Odată determinate pulsațiile proprii și funcțiile proprii, se poate scrie expresia deplasării în vibrație după un mod propriu :

$$w_{mn}(x, y, t) = Z_{mn}(x, y) \sin(\omega_{mn}t + \theta_{mn}) = A_{mn} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) \right] Y_m(y) \sin(\omega_{mn}t + \theta_{mn}) \quad (2.171)$$

care se poate realiza doar în următoarele condiții inițiale [3,9,72,73,74]:

$$\begin{cases} w(x, y, 0) = Z_{mn}(x, y) \sin \theta_{mn} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = \omega_{mn} Z_{mn}(x, y) \cos \theta_{mn} = v_0 \end{cases} \quad (2.172)$$

În cazurile în care condițiile inițiale diferă de (2.172), mișcarea rezultată se exprimă printr-o suprapunere de moduri proprii [3,9,72,73,74]:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Z_{mn}(x, y) \sin(\omega_{mn}t + \theta_{mn}) \quad (2.173)$$

Pentru o placă dreptunghiulară cu laturile $a=0,95$ mm și $b=0,45$ mm din același oțel s-au calculat cu programul Mathcad pulsațiile proprii pentru $m=1...10$ și $n=1...10$ în tabelul 2.9, respectiv frecvențele proprii pentru $m=1...10$ și $n=1...10$ în tabelul 2.5.

Tabelul 2.5. Frecvențele obținute prin calcul analitic pentru cazul ÎÎ – LL

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	1	2	3	4	5
1	12.481758	27.774121	64.92806	160.943574	141.82066
2	34.374959	48.667322	91.821261	189.83678	168.71386
3	66.46932	82.76168	132.98771	224.93114	263.80822
4	108.21841	126.51077	176.91562	276.68022	408.55731
5	161.65431	180.94668	236.10061	353.11613	601.99322
6	225.59434	247.88671	321.66471	495.05616	843.93325
7	301.9841	301.2765	387.4304	585.4459	934.323
8	392.8028	354.0952	489.52593	624.2646	1073.1417
9	470.0411	468.3334	516.76775	811.5029	1160.38
10	534.6942	681.9866	696.1405	947.156	1196.0331

Se observă că relația (2.163), ca și în cazul SR-LL, este identică cu relația (2.88^l) de la bară pentru cazul liber-liber [12].

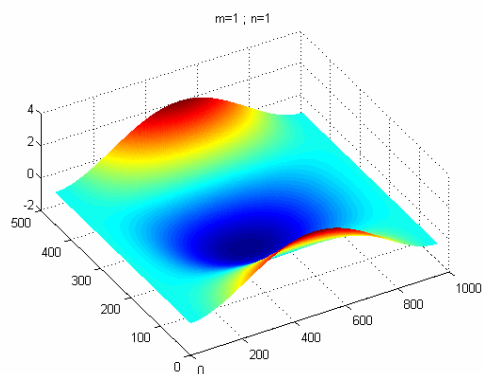
Formele proprii sunt de forma:

$$Z_{ij} = Z_i \cdot Z_j \quad (2.88^{\text{ll}})$$

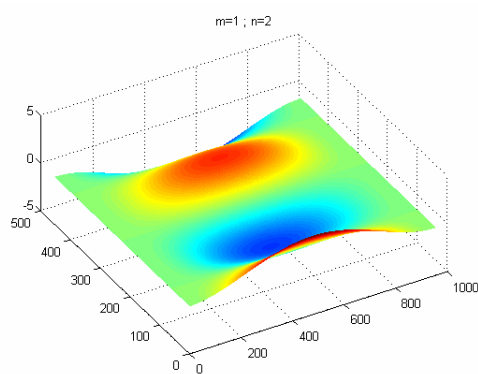
unde i și j reprezintă numărul de moduri, iar Z_j este dat de relația (2.147^{lll}).

Cu ajutorul programului MATLAB, s-au determinat formele proprii de vibrație pentru placa dreptunghiulară încastrată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi, care sunt prezentate în figura 2.6., unde s-au folosit pasul de 0,005 și relația:

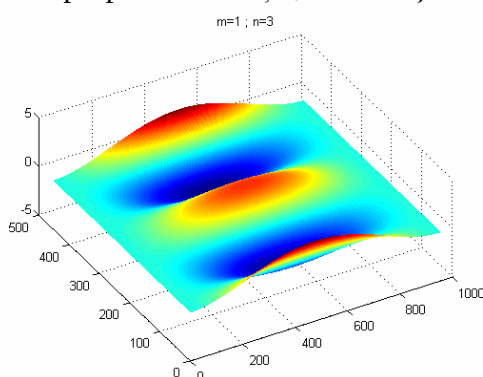
$$Z_{mn}(x, y) = \frac{16}{n \cdot \pi^2 \cdot \left[\frac{(2m-1) \cdot \pi}{2} - \frac{\pi}{(2m-1)} \right]} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}\right)x \right] Y_m(y) \quad (2.175)$$



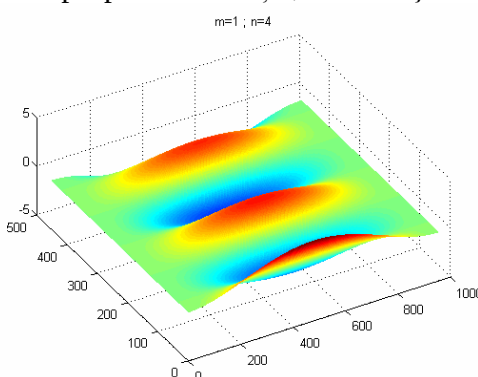
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=1$.



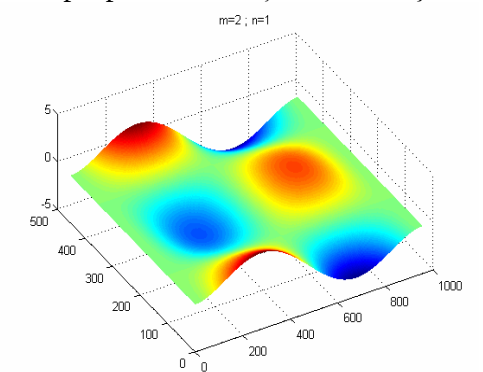
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=2$.



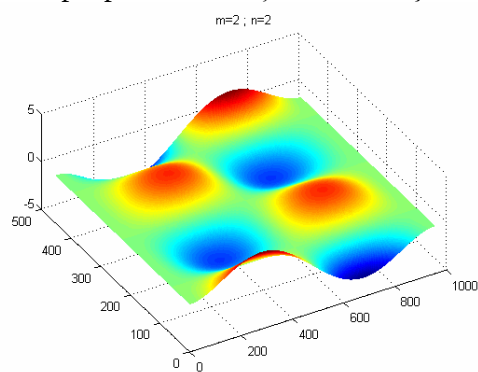
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=3$.



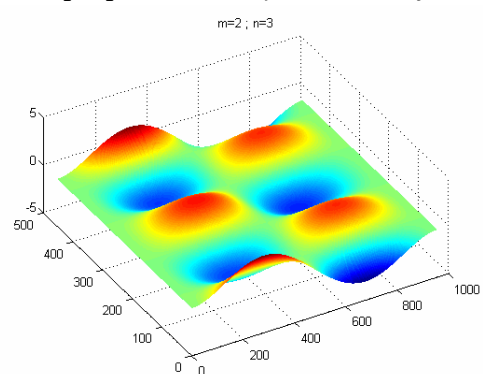
Forme proprii de vibrație, cu $m=1$ și $n=4$.



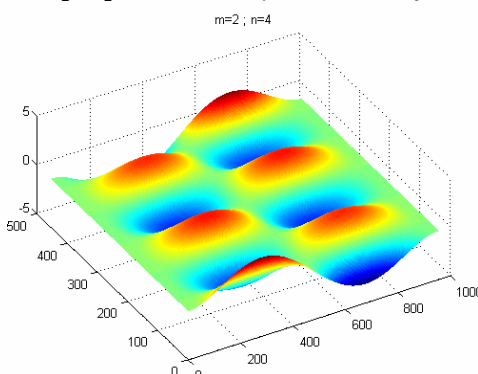
Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=2$.

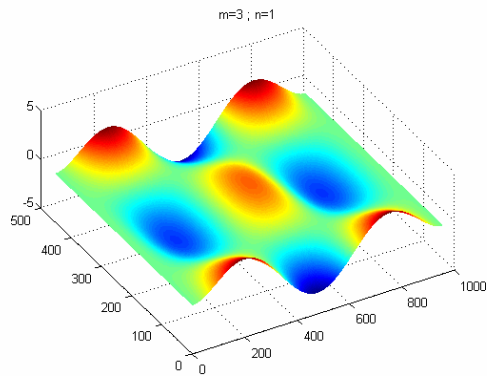


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=3$.

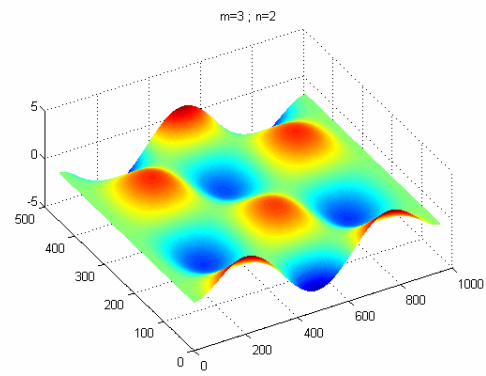


Forme proprii de vibrație, cu $m=2$ și $n=4$.

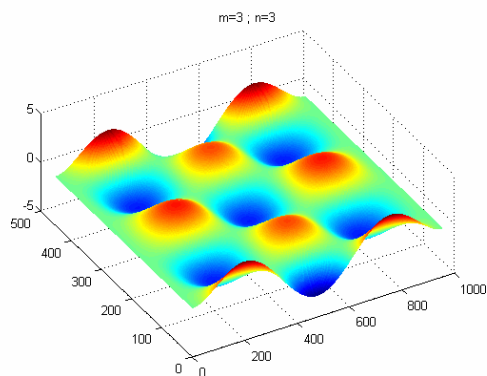
Fig. 2.7. Formele proprii de vibrație pentru placa încastată pe două laturi paralele (lățime) și liberă pe celelalte două laturi (lungime)



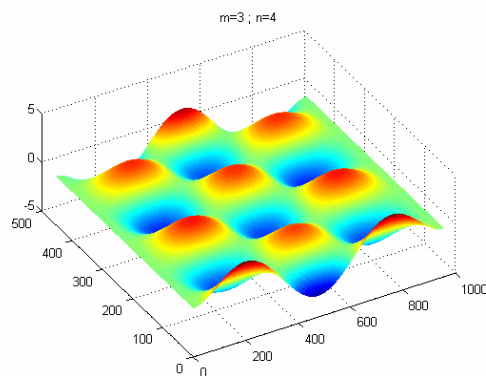
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=1$.



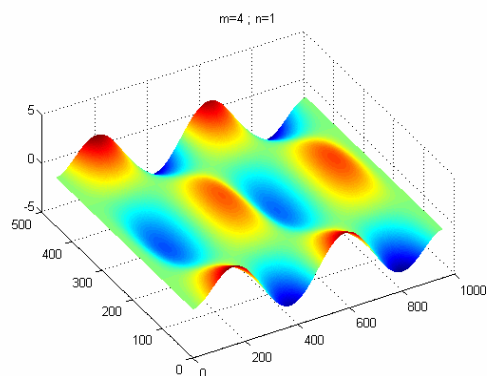
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=2$.



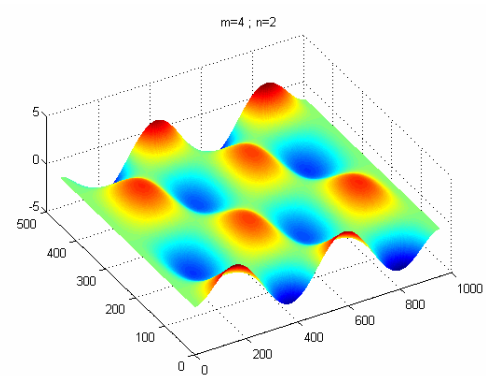
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=3$.



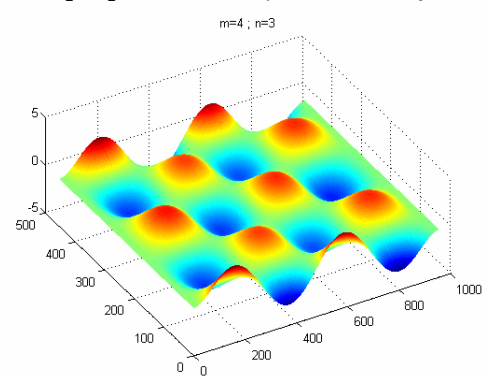
Forme proprii de vibrație, cu $m=3$ și $n=4$.



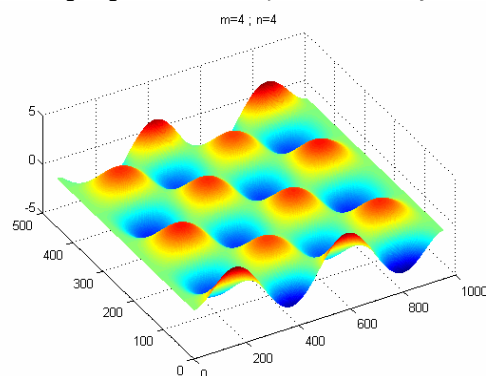
Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=1$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=2$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=3$.



Forme proprii de vibrație, cu $m=4$ și $n=4$.

Fig. 2.7. Formele proprii de vibrație pentru placa încadrată pe două laturi paralele(lățime) și liberă pe celelalte două laturi (lungime) continueare

2.7 Concluzii

Studiul efectuat pe plăci elastice subțiri având aceeași grosime, dar cu diferite condiții de contur a relevat utilitatea diverselor teorii în modelarea teoretică a plăcilor subțiri. Cercetările au condus la obținerea soluțiilor generalizate pentru forma modurilor de vibrație și a frecvențelor proprii, iar simulările pentru condițiile unei plăci reale au condus la soluții credibile. Utilizarea doar a relațiilor din literatura de specialitate reprezentate prin funcțiile trigonometrice nu conduce la soluții exacte ale formei modale, fiind necesară utilizarea unor funcții mai precise. Acest fapt va fi analizat în capitolul 3. Pentru descrierea mai exactă a formelor proprii se presupune o funcție de forma $Z_{mn}(x,z)=Z_m(x)\cdot Z_n(y)$, care utilizează pentru Z_i și Z_j relațiile echivalente cu cele utilizate la bare cu condiții similare de rezemare.

CAP. 3 ANALIZA PARAMETRICĂ A COMPORTAMENTULUI DINAMIC ÎN CAZUL PLĂCILOR SUBȚIRI CU DEFECT

3.1 Modelare prin metoda elementelor finite

Simularea numerică sau digitală utilizează modelarea și analiza computerizată pentru a verifica comportarea în regim static sau dinamic a produselor supuse solicitărilor la diferite condiții de funcționare [6,7,8,17,56,71]. Simularea și analiza numerică, folosind un prototip virtual, studiază aspectele descrise mai sus, eliminând sau reducând posibilitatea de apariție a defectelor cauzate de solicitările care apar.

Utilizarea metodelor moderne de proiectare asistată de calculator și analiza comportării piesei la solicitări impuse prin metoda elementului finit pun în mână inginerului instrumentul necesar de lucru pentru optimizarea proiectării, cu efecte puternic pozitive referitoare la cunoașterea răspunsului piesei la solicitările impuse și a deformației pieselor, reducerea greutateii, detectarea zonelor critice. Acest fapt contribuie la creșterea încrederii inginerilor în soluția rezultată și permite luarea unor decizii de proiectare în cunoștință de cauză.

O astfel de analiză implică, însă, asimilarea modului de lucru cu un program specializat de proiectare asistată, precum și a programelor de simulare și analiză cu element finit. Fără a neglija ușurința în manipularea acestor programe, specializarea în operarea cu astfel de programe se poate face numai printr-o investiție intelectuală, ceea ce impune asimilarea acestor metode de proiectare, simulare și analiză.

Ipoteze care stau la baza simulării [6,7,8,47,48,49,53,78,79]:

- sistemul analizat poate fi real sau teoretic;
- se poate construi un model matematic și logic al sistemului analizat.

Simularea este utilizată pentru rezolvarea problemelor care nu pot fi abordate prin metode matematice/analitice sau pentru extinderea rezultatelor experimentale și optimizare. Realizarea unui experiment de simulare este un proces care se desfășoară de obicei în mai multe etape [6,7,8,20,23,24,47,48,49,53,78,79]:

- formularea problemei;
- colecționarea și prelucrarea primară a datelor;
- formularea modelului de simulare;
- estimarea parametrilor caracteristicilor operative din datele reale;

- evaluarea performanțelor modelului și testarea parametrilor;
- construirea programului de calcul (algoritmul simulării);
- validarea programului;
- planificarea experiențelor de simulare;
- analiza datelor simulate.

Modelul discret reprezintă o rețea formată dintr-un număr finit de elemente ce interacționează, fiind cuplate prin funcții de interpolare sub forma unor polinoame. Precizia rezultatelor obținute depinde de modul în care gradul ecuației polinomiale utilizate reușește să aproximeze soluția cât mai aproape de realitate; creșterea ordinului conduce asimptotic spre rezultate apropiate de realitate. Aceste performanțe însă sunt atinse cu un efort de procesare însemnat, în acest fel crescând timpul necesar obținerii soluției. Referitor la acest aspect, pentru modelul curent cea mai bună alegere o reprezintă elementele de tip „Tetraedal“.

Modelarea cu elemente finite conferă flexibilitate de calcul, vizualizarea rezultatelor sub formă grafică, analiza statică în vederea determinării stării de tensiune și deformație, identificarea zonelor de concentrare a tensiunilor; studii de optimizare a structurilor pentru obținerea unor soluții eficiente. Unul din avantajele utilizării acestor programe este acela că permit adăugarea de elemente noi sau modificarea elementelor existente. În teză este tratată analiza modală a plăcilor elastice subțiri din oțel, în vederea determinării frecvențelor proprii de vibrație a plăcilor supuse studiului.

3.2 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile fără defecte

Metoda numerică aleasă pentru analiza modală este metoda elementului finit (MEF) folosind programul SolidWorks. Modelarea geometriei de analizat a fost făcută în modulul Geometry al aceluiași program. Pentru obținerea frecvențelor proprii s-a folosit modulul de analiză statică pentru plăci subțiri rectangulare sub acțiunea greutății proprii. Rezultatele obținute în acest modul au fost transferate în modulul de analiză modală, temperatura mediului ambiant fiind de 20 °C. Prin analiza modală au fost determinate primele 30 de frecvențe proprii, din care primele 20 de frecvențe proprii au fost luate în considerare. Discretizarea modelului 3D s-a făcut cu elemente finite tetraedrale. Materialul utilizat din baza de date a programului, fig.3.1., este oțelul AISI 1045, cu proprietățile mecanice prezentate în tabelul 3.1, [47,48,49,53,78]:

Tabelul 3.1. Proprietățile de material pentru oțelul AISI 1045

Limita de curgere	Rezistența la rupere	Densitatea	Modulul de elasticitate	Coeficientul Poisson	Coeficientul de dilatare termică
[N/mm ²]	[N/mm ²]	[kg/m ³]	[N/mm ²]	[-]	[K ⁻¹]
530	625	7,850	205	0.29	0.0000115

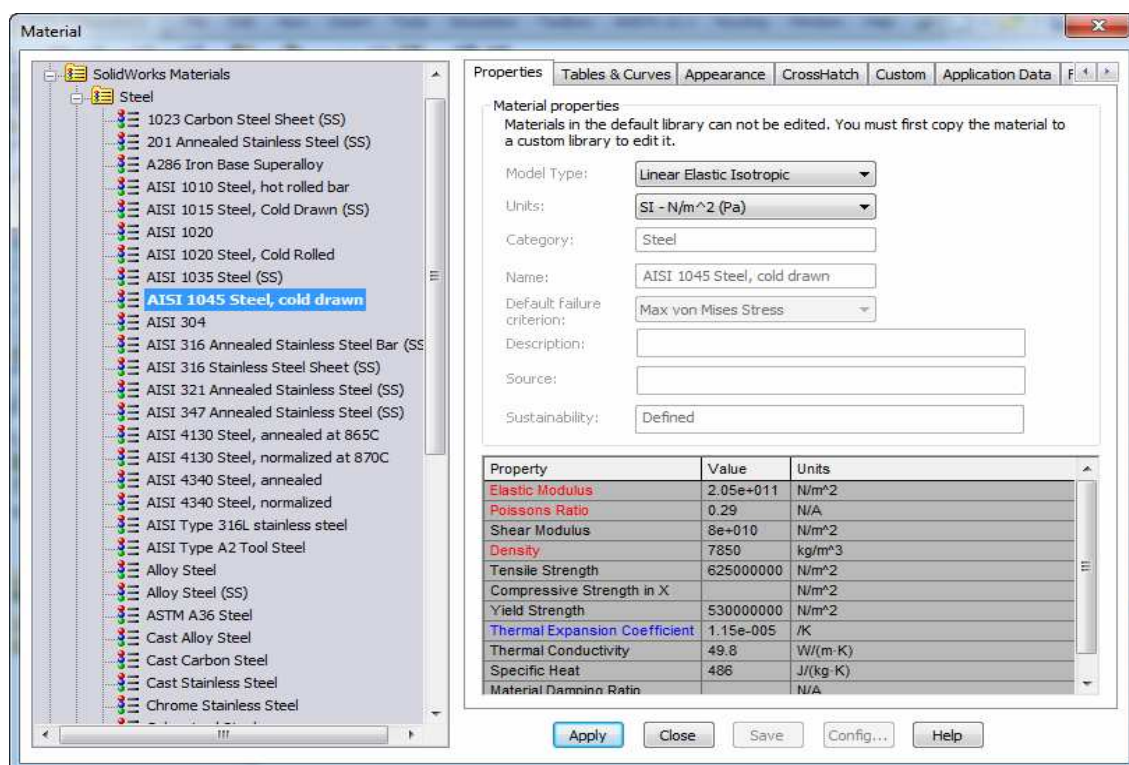


Fig.3.1 Selectarea materialului din baza de date SolidWorks

Modelul 3D utilizat este o placă subțire, dreptunghiulară reală, dimensiunile fiind prezentate din tabelul 3. 2.:

Tabelul 3.2. Dimensiunile plăcilor studiate

Modurile de rezemare a plăcii Dimensiunile plăcii	SR-SR	SR-ÎÎ	SR-LL	ÎÎ-ÎÎ	ÎÎ-LL
Lungime [m]	0,98	0,98	0,98	0,95	0,95
Lățime [m]	0,43	0,40	0,45	0,40	0,45
Înălțime [m]	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002

După crearea geometriei plăcilor, crearea studiului de tip frecvență și alegerea materialului, se vor parcurge încă 4 etape, și anume [47,48,49,53,78]: aplicarea de constrângeri, discretizarea în elemente finite (mesh), calculul de analiză modală și vizualizarea rezultatelor, fig.3.2.

Discretizarea în elemente finite s-a realizat prin opțiunea „Solid mesh” [47,48,49,53,78], folosindu-se următoarele opțiuni: High pentru Mesh Quality, Solid mesh pentru Mesh type, Standard mesh și Curvature based mesh pentru Mesher Used. În figura 3.2. se prezintă aplicarea constrângerilor pe placă prin intermediul muchiilor laterale (grosimea plăcii).

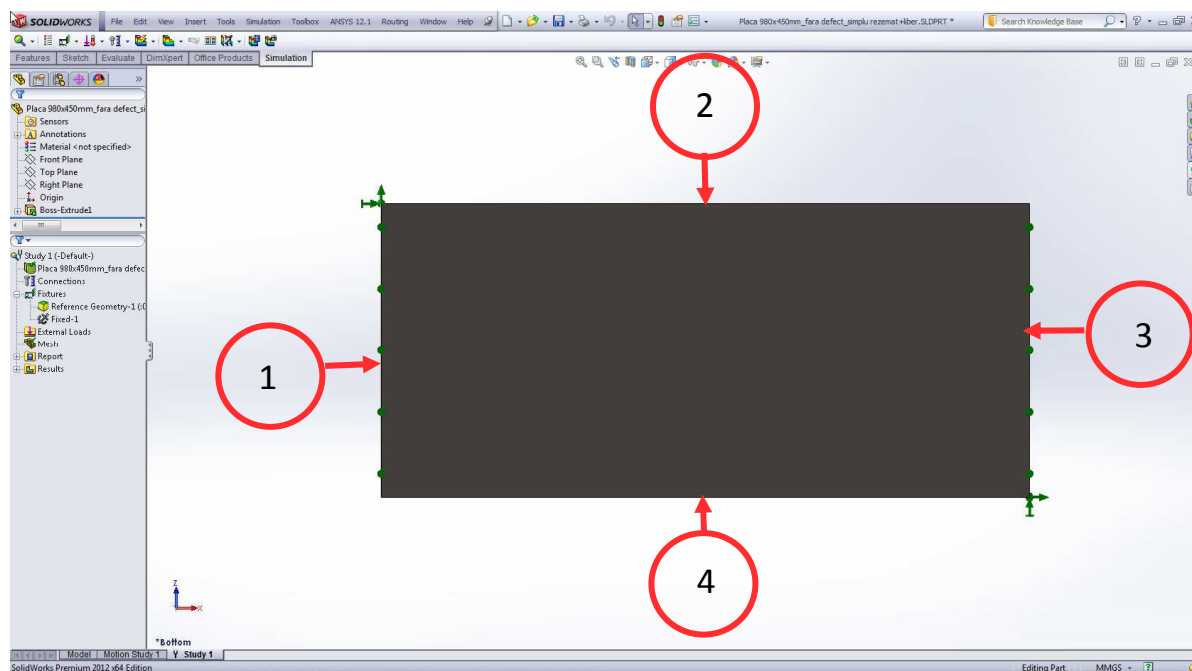


Fig.3.2 Aplicarea constrângerilor pentru modelul de placă studiat

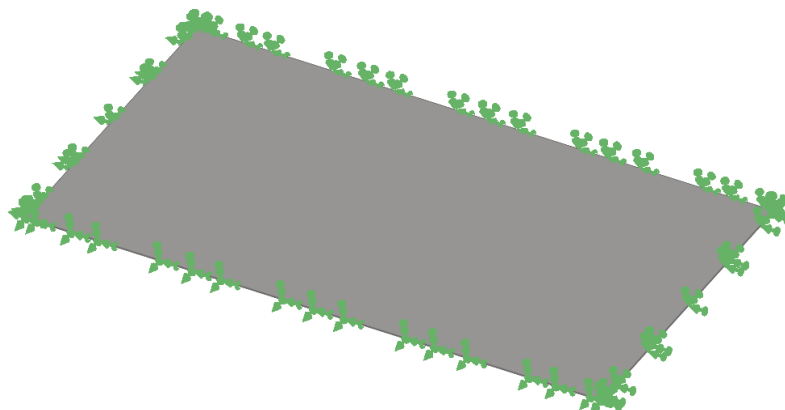
Determinarea frecvențelor proprii s-a realizat folosind modulul Simulation din programul SolidWorks.

Pentru calculul frecvenței proprii se parcurg următoarele etape [47,48,49,53,78]:

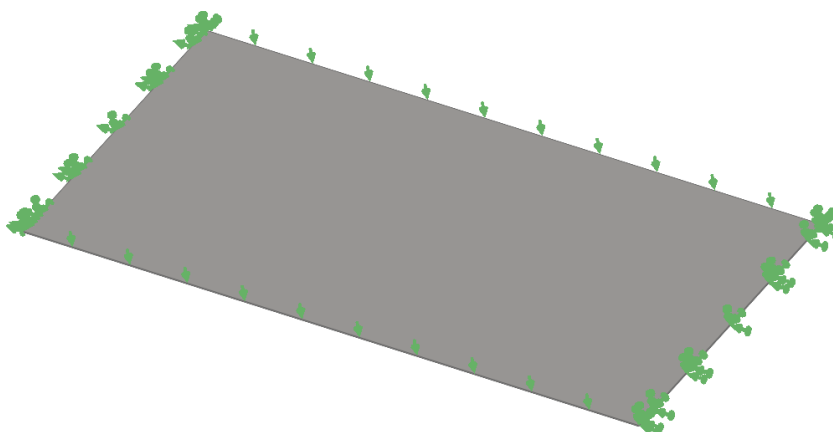
- Crearea geometriei plăcilor cu și fără defect în SolidWorks;
- Activare modul Simulation;
- Creare studiu de simulare de tip frecvență și denumire studiu; din opțiunea studiului de tip frecvență se activează Properties, unde se setează numărul modurilor de frecvență calculate, în cazul de față 30 de moduri, fig. 3.3;
- Aplicare restrângeri;
- Discretizare în elemente finite (mesh) și calcul analiză;
- Vizualizare rezultate.

Pentru analiza modală a plăcilor fără defect s-au luat în studiu cinci tipuri de rezemare a plăcii prezentate în fig.3.3:

- a) încastrat-încastrat;
- b) încastrat-simplu rezemat;
- c) încastrat-liber;
- d) simplu rezemat-simplu rezemat;
- e) simplu rezemat-liber.

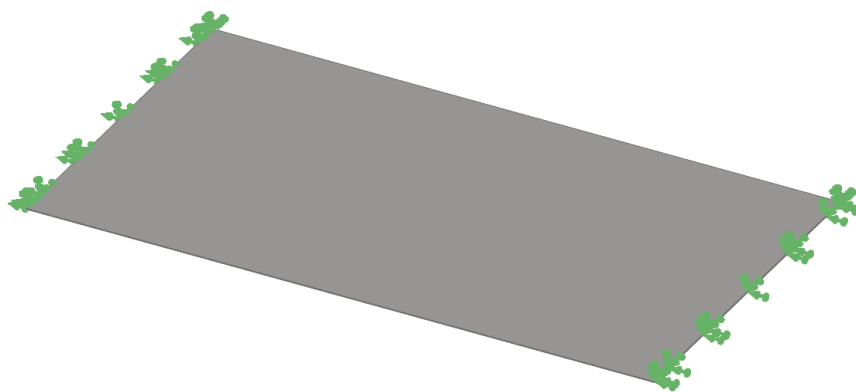


a) încastrat-încastrat 1,2,3 și 4 – blocate pe direcția Ox , Oy și Oz

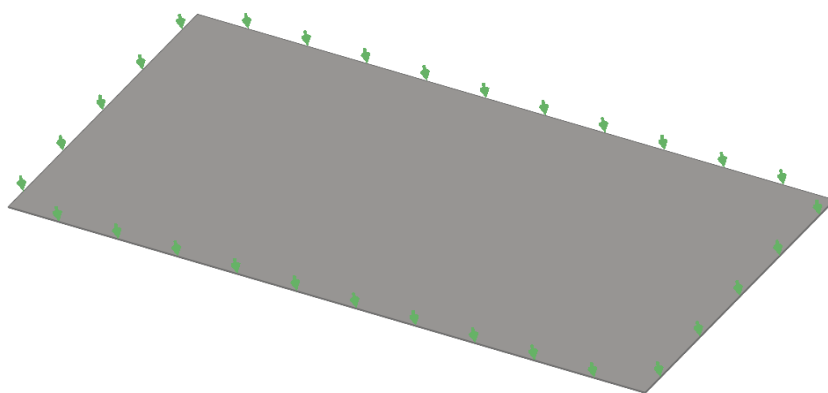


b) încastrat-simplu rezemat: 1 și 3 – blocată pe direcția Ox , Oy și Oz ; 2 și 4 – blocată pe direcția Oz

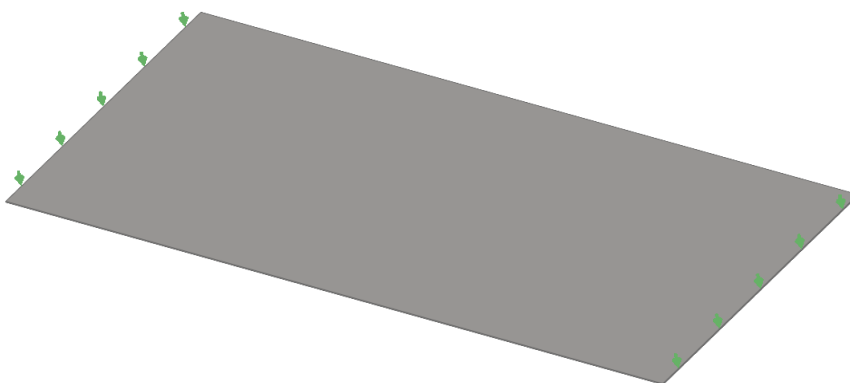
Fig. 3.3. Tipuri de rezemare a plăcilor studiate



c) încastrat-liber: 1 și 3 – blocată pe direcția Ox , Oy și Oz ; 2 și 4 – este liberă pe toate direcțiile



d) simplu rezemat-simplu rezemat 1,2,3 și 4 – blocate pe direcția Oz



e) simplu rezemat-liber: 1 și 3 – blocate pe direcția Oz ; 2 și 4 – este liberă pe toate direcțiile

Fig. 3.3. Tipuri de rezemare a plăcilor studiate (continuare)

Discretizarea modelului 3D s-a făcut cu elemente tetraedrale cu dimensiunea medie a elementului finit de 2 mm. În tabelul 3.3 se sintetizează informațiile de discretizare pentru toate plăcile studiate în acest subcapitol.

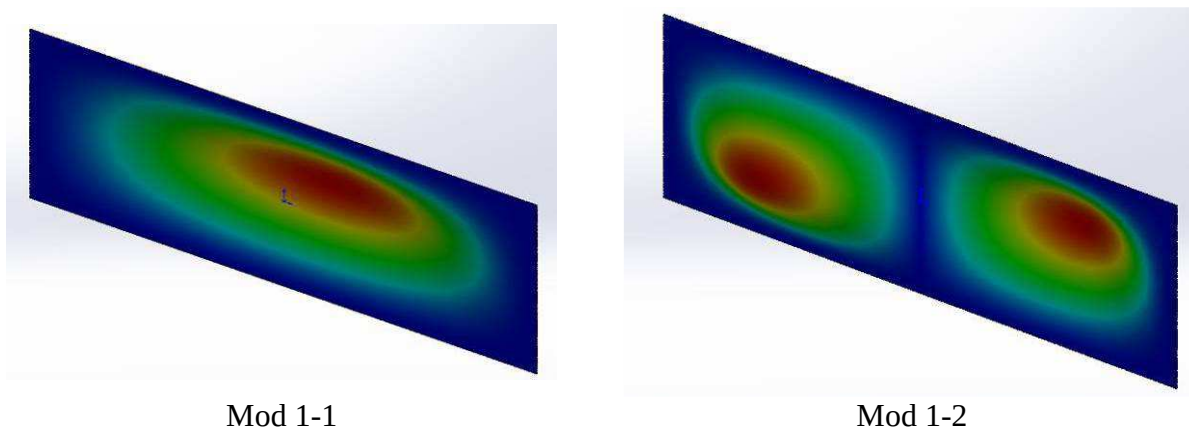
Tabelul 3.3. Informații de discretizare

Tipul de placă /rezemare/dimensiune	Numărul de noduri	Numărul de elemente	Timpul de discretizare [min]
Fără defect încastrat-încastrat 950x400mm	2.315.689	1.352.214	05:11
Fără defect încastrat-simplu rezemat 950x450mm	2.467.056	1.451.870	03:47
Fără defect încastrat-liber 950x450 mm	2.500.495	1.479.567	05:16
Fără defect simplu rezemat-liber 980x450 mm	2.489.419	1.472.109	04:29
Fără defect încastrat-simplu rezemat 980x450mm	2.763.438	1.648.846	05:25

3.2.1 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile fără defecte încastrate pe toate laturile

Pentru obținerea frecvențelor proprii ale plăcilor fără defect, s-a utilizat modulul de analiză modală al programului de analiză cu element finit SolidWorks. Au fost determinate primele 30 de frecvențe proprii de vibrație pentru toate plăcile studiate.

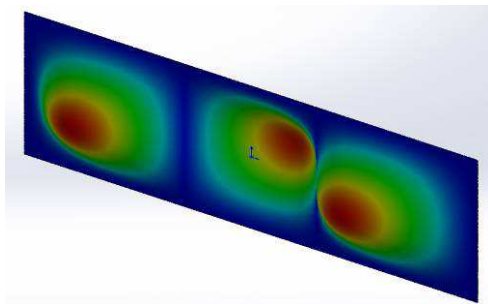
În fig.3.4 se prezintă zece moduri de vibrație obținute prin simulare cu element finit pentru o placă fără defect cu tipul de rezemare încastrat-încastrat [48,110,111].



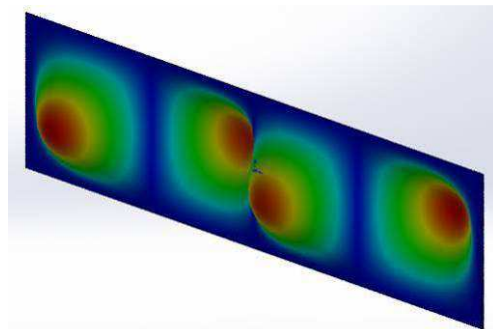
Mod 1-1

Mod 1-2

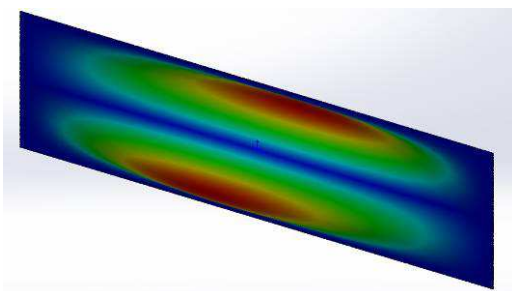
Fig. 3.4. Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare încastrat-încastrat



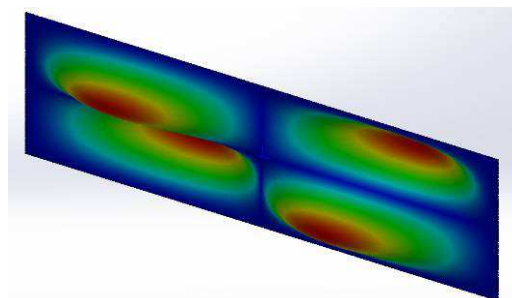
Mod 1-3



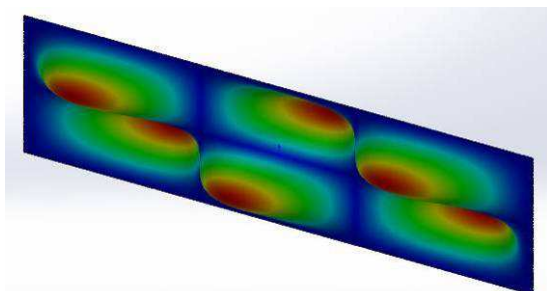
Mod 1-4



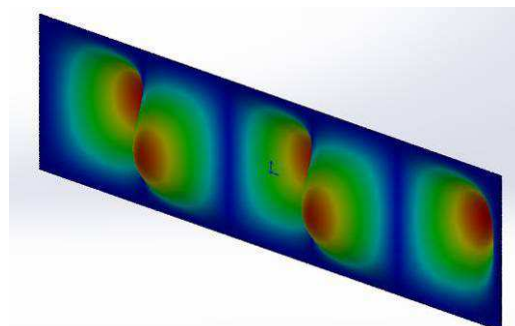
Mod 2-1



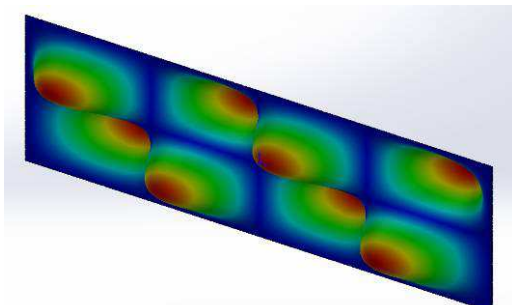
Mod 2-2



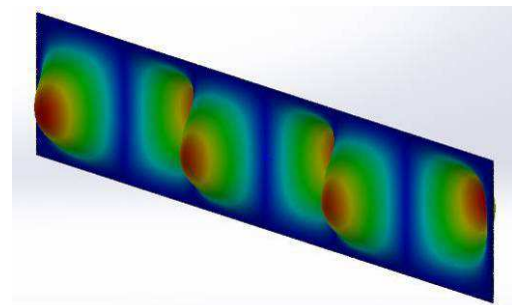
Mod 2-3



Mod 1-5



Mod 2-4



Mod 1-6

Fig. 3.4. Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare încastrat-încastrat (continuare)

În urma simulării numerice s-au obținut frecvențele proprii pentru placa încastrată pe toate laturile în funcție de modurile de vibrație (tabelele 3.4-3.7, prima coloană). Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 3.4-3.7, coloana a 3-a.

Frecvențele proprii obținute prin FEM se compară cu frecvențele proprii determinate pe cale analitică (tabelele 3.4-3.7, coloana a 2-a), calculându-se abaterea procentuală (eroarea) cu relația [28,35, 82,83,84,113]:

$$\varepsilon = \frac{f_A - f_{FEM}}{f_A} \cdot 100 \text{ [%]} \quad (3.1)$$

unde:

ε - reprezintă eroarea sau abaterea procentuală;

f_A - valoarea frecvenței proprii determinată analitic;

f_{FEM} - valoarea frecvenței proprii determinată prin FEM.

Valorile abaterii procentuale sunt prezentate în tabelele 3.4.-3.7, coloana a 4-a.

Tabelul 3.4. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată
pe toate laturile $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
1-1	78,143606	73,047	6,5221024
1-2	92,86676	87,541	5,73483989
1-3	115,45148	113,94	1,30919067
1-4	158,89779	152,73	3,88160842
1-5	213,20566	203,54	4,53349128
1-6	268,37512	265,93	0,91108296
1-7	344,40614	339,59	1,3983897
1-8	431,29875	424,31	1,62039653
1-9	529,05293	519,99	1,71304788
1-10	637,66868	626,5	1,75148637

Tabelul 3.5. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile pentru modurile $m=2$ și $n=1\dots 9$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
2-1	203,67575	193,99	4,75547531
2-2	225,39891	208,78	7,37311019
2-3	257,98363	234,18	9,22679862
2-4	301,42993	279,78	7,18240886
2-5	345,73781	318,91	7,75958233
2-6	410,90726	378,66	7,84781948
2-7	466,93829	449,92	3,64465506
2-8	563,8309	532,56	5,54614868
2-9	681,58507	626,45	8,08924262

Tabelul 3.6. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=3$ și $n=1\dots 7$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
3-1	387,47398	375,67	3,04639295
3-2	409,19713	390,69	4,52279076
3-3	441,78185	416,07	5,82003312
3-4	485,22816	452,15	6,81703222
3-5	539,53603	499,21	7,4742052
3-6	604,70549	557,51	7,80470672
3-7	680,73651	627,11	7,87771909

Tabelul 3.7. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=4$ și $n=1\dots 4$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
4-1	632,53827	617,59	2,36321986
4-2	654,26142	632,81	3,27872305
4-3	686,84615	658,33	4,15175218
4-4	730,29245	694,4	4,91480502

În figurile 3.5, 3.7, 3.9 și 3.11 se prezintă variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru cazurile analizate, iar în figurile 3.6, 3.8, 3.10 și 3.12 se prezintă abaterea procentuală a frecvenței față de frecvența determinată analitic, în funcție de modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

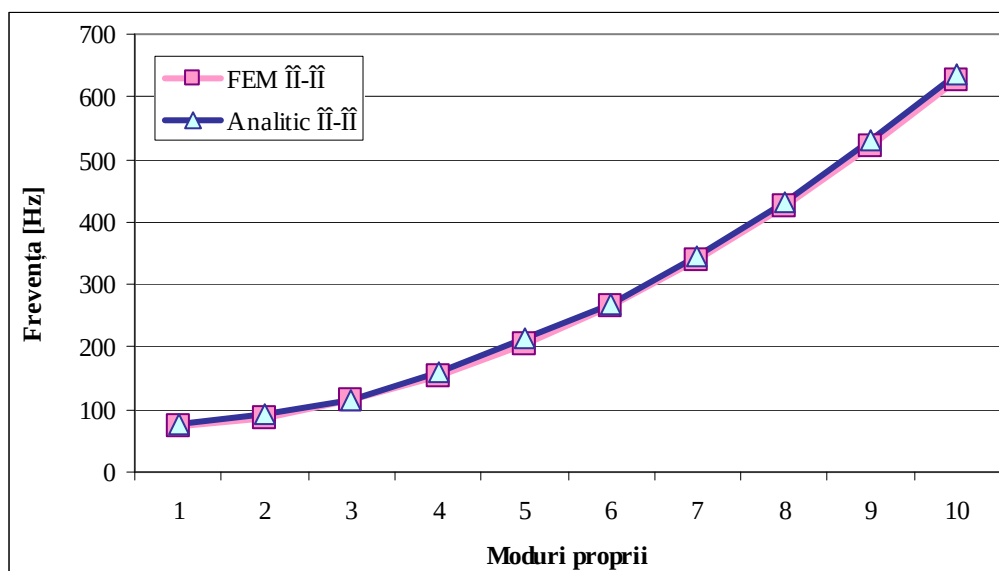


Fig. 3.5. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

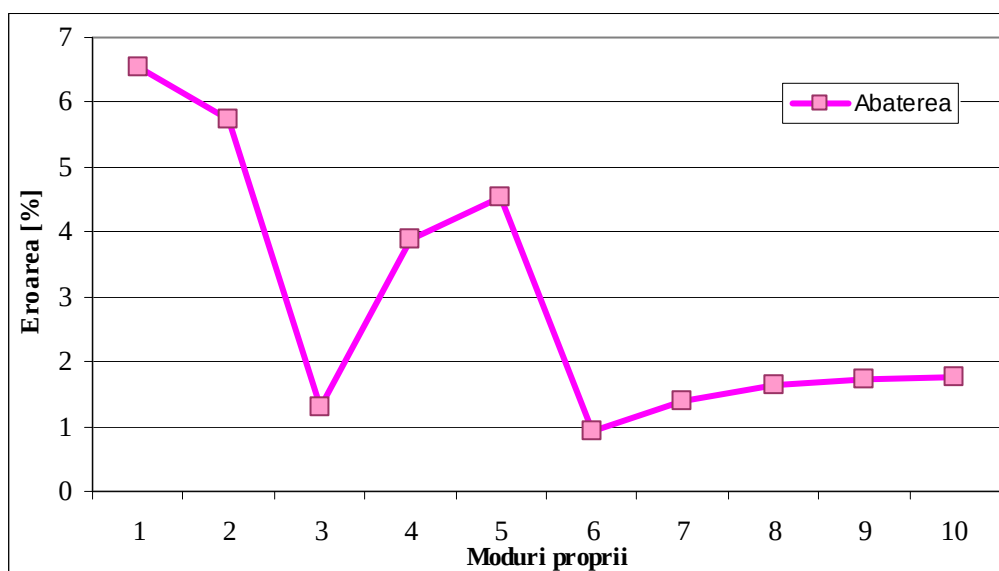


Fig. 3.6. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

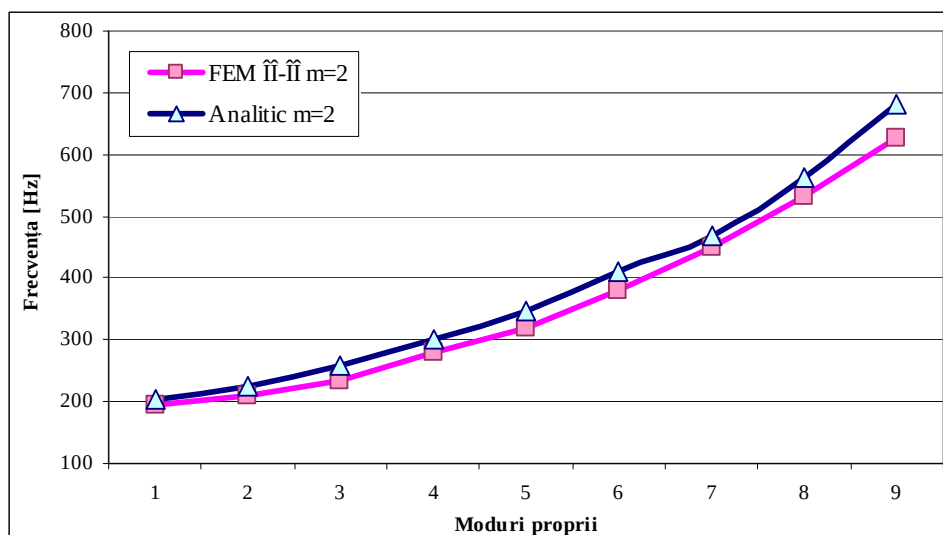


Fig. 3.7. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

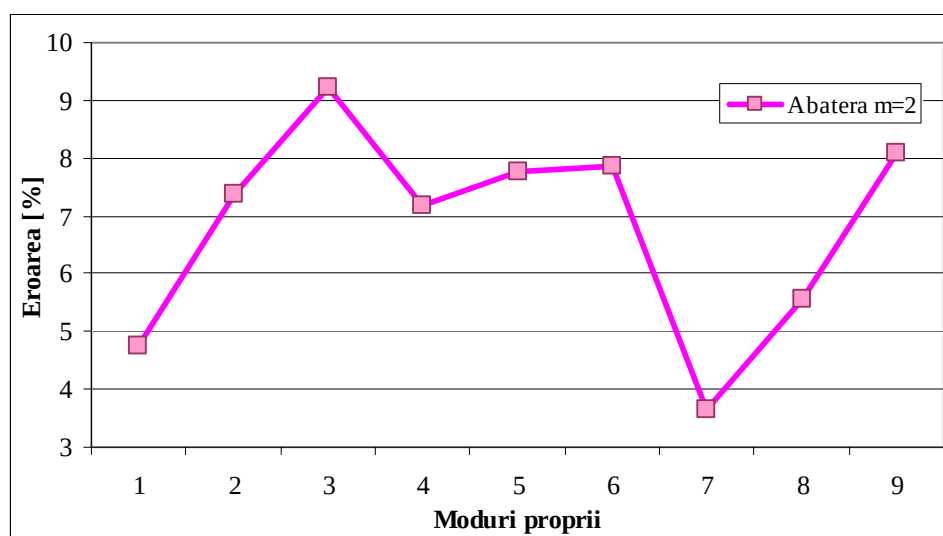


Fig. 3.8. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

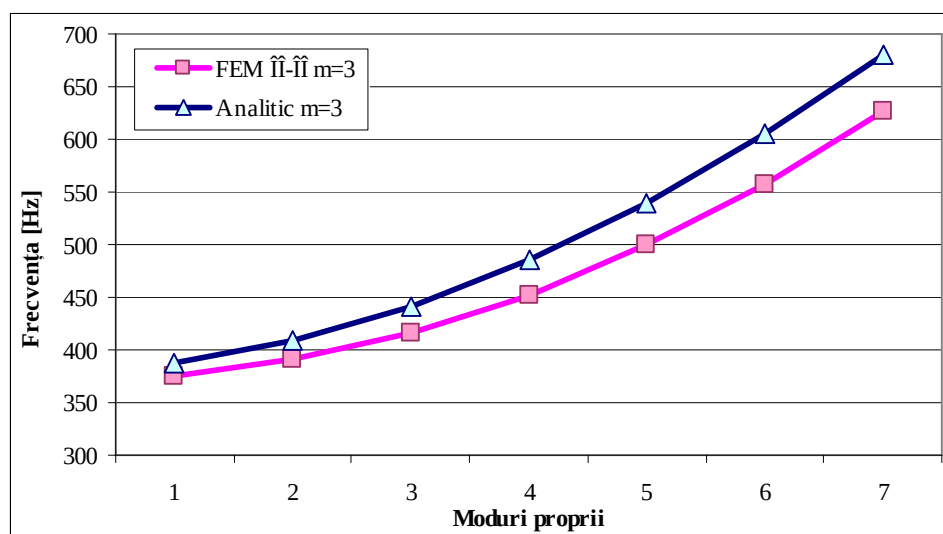


Fig. 3.9. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

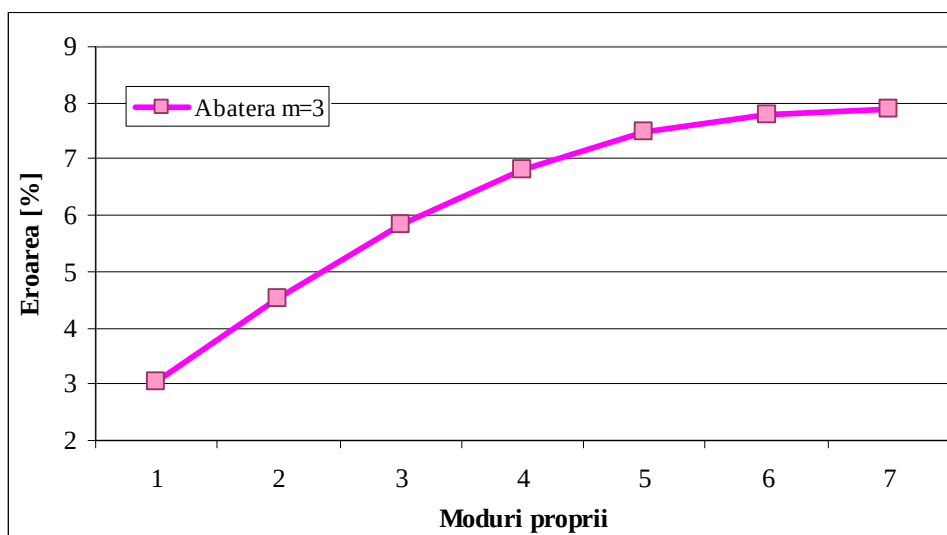


Fig. 3.10. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

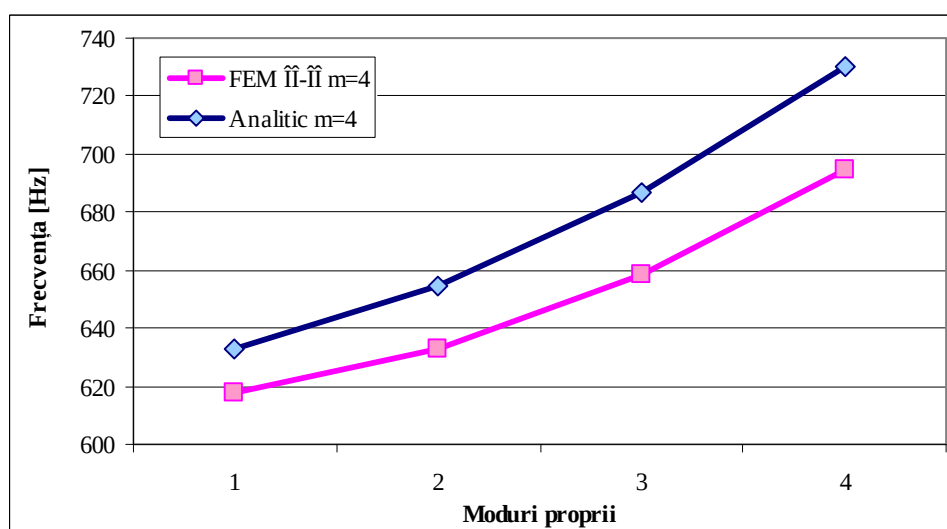


Fig. 3.11. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

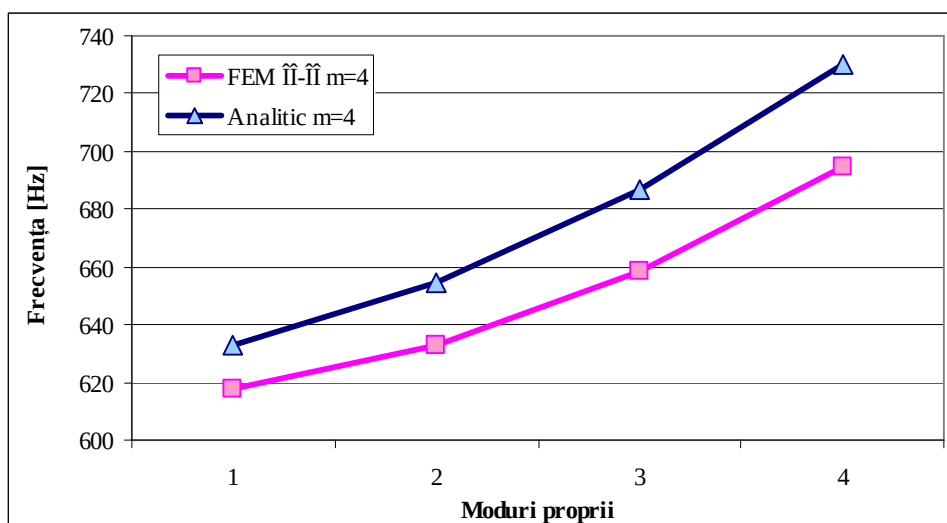


Fig. 3.12. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 3.6, 3.8, 3.10 și 3.12 și tabelele 3.4.-3.7 se observă că eroarea maximă este de 9,3 % pentru modul $m=2$ și $n=3$. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la modul $m=2$.

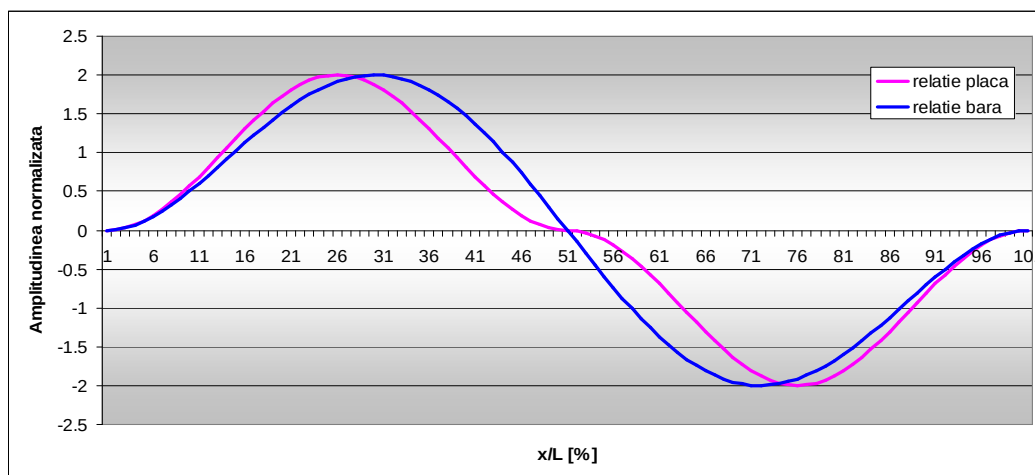


Fig. 3.13. Forma proprie pentru Modul 2, pentru FEM

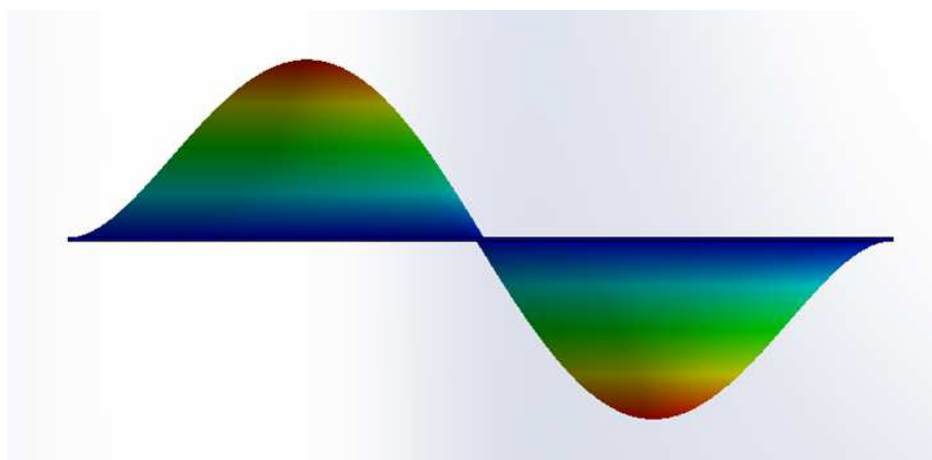


Fig. 3.14. Starea deformată a plăci în secțiune prin FEM

Comparând alura curbei care reprezintă starea deformată a plăcii încastrată corespunzătoare modului 2 de vibrație, dedusă analitic din relațiile (2.137) respectiv (2.147^{//}) și reprezentate grafic în figura 3.13, cu rezultatul obținut prin simulări numerice utilizând FEM, reprezentat în figura 3.14, se observă o foarte bună corelare pentru cazul utilizării relației ce implică atât funcțiile trigonometrice cât și cele hiperbolice.

3.2.2 Analiza rezultatelor obținute pentru placa fără defecte încastrată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi

Pentru obținerea frecvențelor proprii ale plăcilor fără defect, s-a utilizat modulul de analiză modală al programului de analiză cu element finit SolidWorks. Au fost determinate primele 30 de frecvențe proprii de vibrație pentru toate plăcile studiate.

În fig. 3.15 se prezintă zece moduri de vibrație obținute prin simulare cu element finit pentru o placă fără defect cu tipul de rezemare încastrat-liber [48].

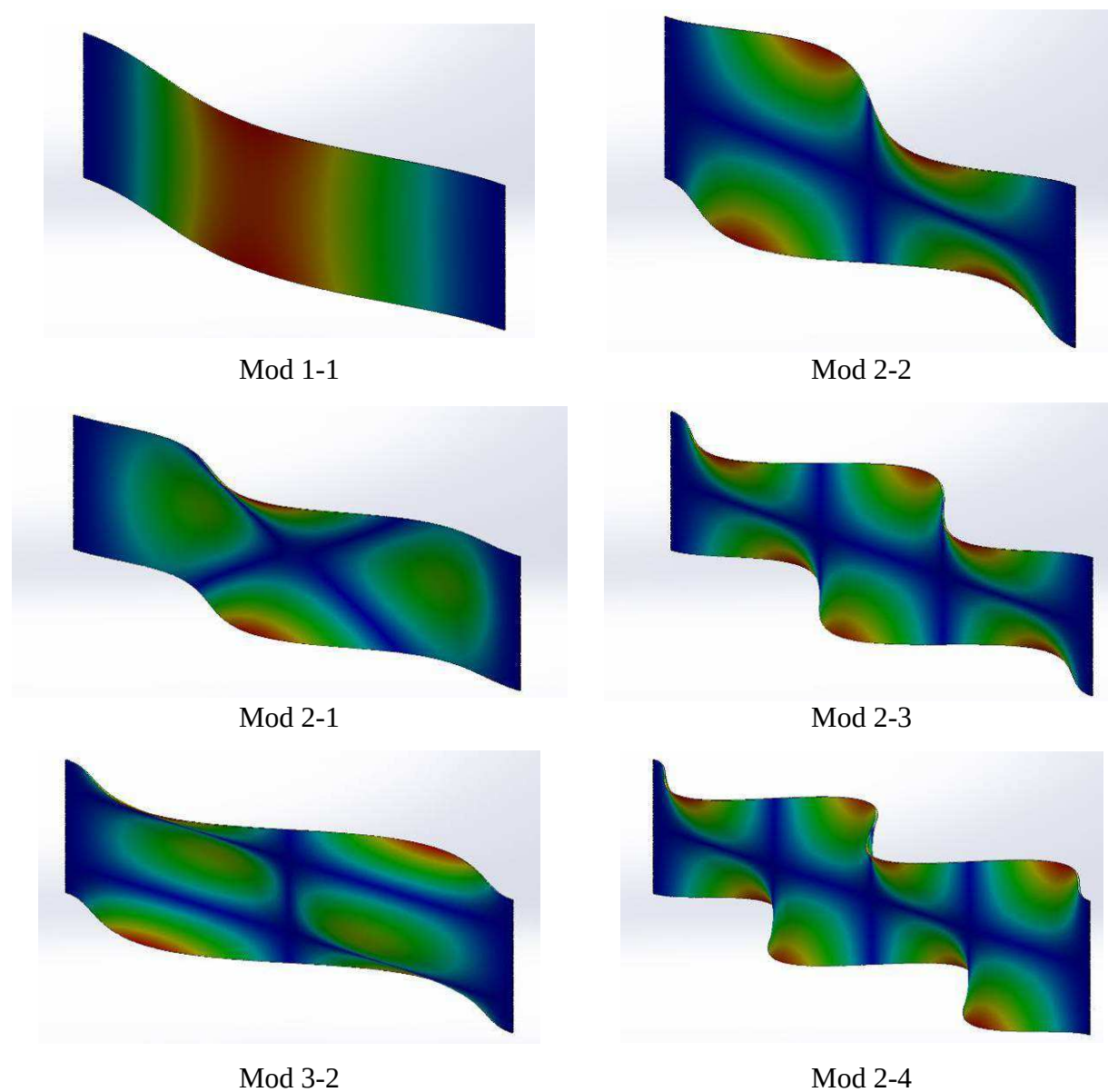


Fig. 3.15. Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare încastrat-liber

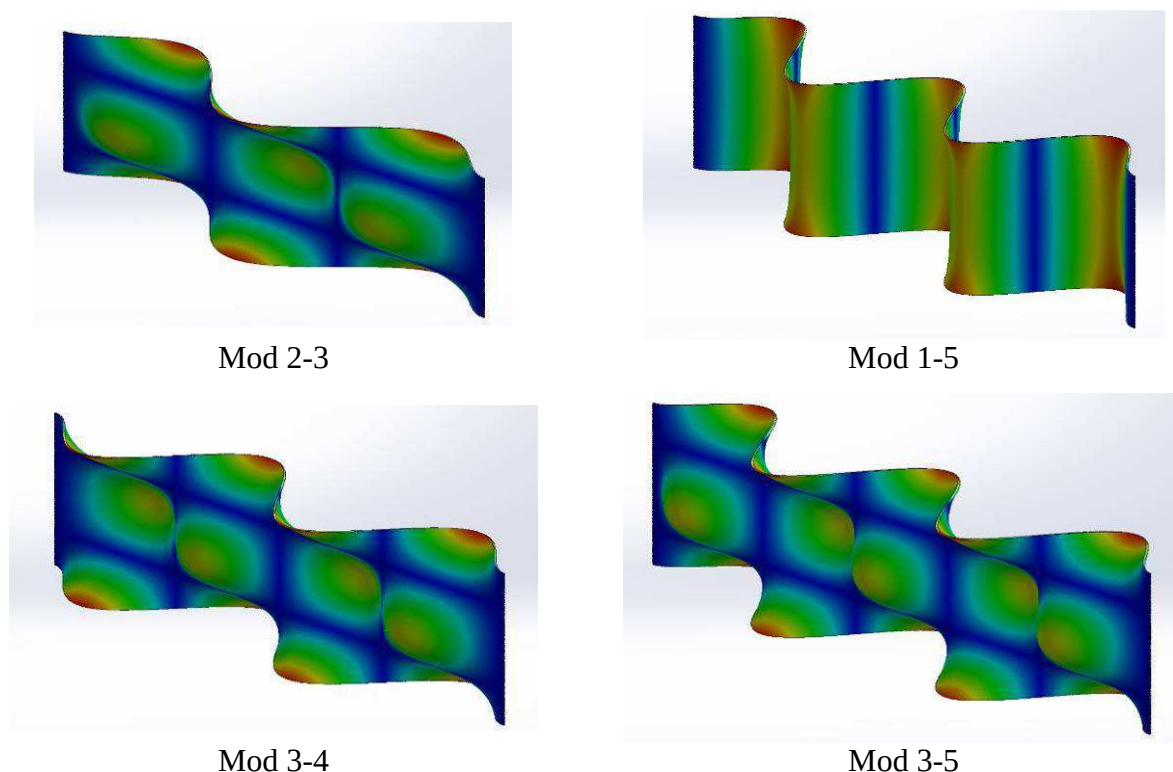


Fig. 3.15. Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare încastrat-liber (continuare)

În urma simulării numerice s-au obținut frecvențele proprii (tabelele 3.8-3.11) pentru placa încastrată pe toate laturile în funcție de modurile de vibrație (coloana 1), rezultatele obținute fiind prezentate numeric în coloana 3. Frecvențele proprii obținute prin FEM sunt comparate cu frecvențele proprii determinate pe cale analitică (coloana 2). Valorile abaterii procentuale calculate cu relația (3.1), sunt prezentate în tabelele 3.8-3.11 (coloana 4).

Tabelul 3.8. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ϵ [%]
1-1	12,481758	11,985	3,98
1-2	34,374959	33,055	3,84
1-3	66,46932	64,877	2,396
1-4	108,21841	107,56	0,608
1-5	161,65431	160,88	0,479
1-6	225,59434	224,91	0,303
1-7	301,9841	299,64	0,776
1-8	392,8028	385,07	1,969
1-9	470,0411	463,65	1,36
1-10	534,6942	533,09	0,3

Tabelul 3.9. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată
pe toate laturile $m=2$ și $n=1\dots9$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
2-1	27,774121	26,28	5,38
2-2	48,667322	46,015	5,45
2-3	82,76168	80,231	3,058
2-4	126,51077	124,13	1,882
2-5	180,94668	178,21	1,512
2-6	247,88671	242,68	2,1
2-7	301,2765	299,66	0,537
2-8	354,0952	351,89	0,623
2-9	468,3334	465,67	0,569

Tabelul 3.10. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată
pe toate laturile $m=3$ și $n=1\dots7$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
3-1	64,92806	64,107	1,265
3-2	91,821261	90,23	1,733
3-3	132,98771	130,22	2,081
3-4	176,91562	175,6	0,744
3-5	236,10061	234,45	0,699
3-6	321,66471	313,06	2,675
3-7	387,4304	377,74	2,501

Tabelul 3.11. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată
pe toate laturile $m=4$ și $n=1\dots4$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
4-1	160,943574	158,31	1,636
4-2	189,83678	183,43	3,375
4-3	224,93114	221,72	1,428
4-4	276,68022	270,99	2,057

În figurile 3.16, 3.18, 3.20 și 3.22 se prezintă variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru cazurile analizate, în figurile 3.17, 3.19, 3.21 și 3.23 se prezintă

abaterea procentuală a frecvenței față de frecvența determinată analitic, în funcție de modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

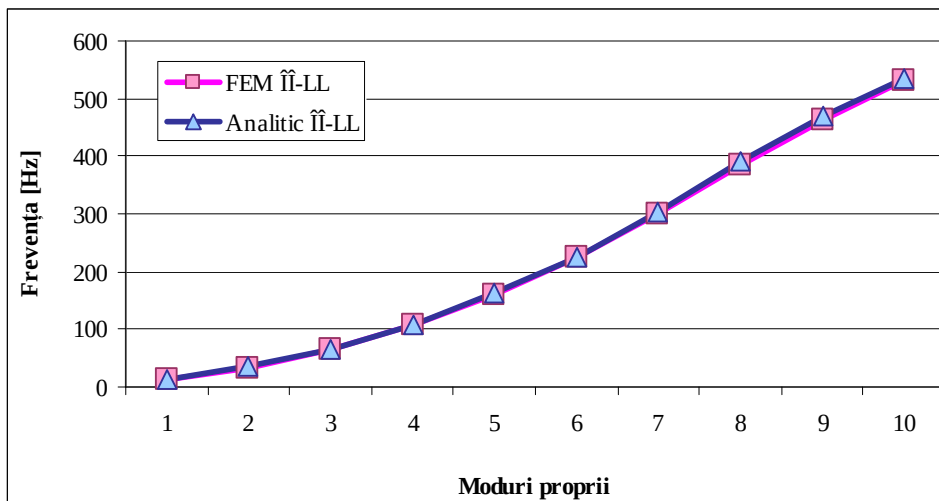


Fig. 3.16. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

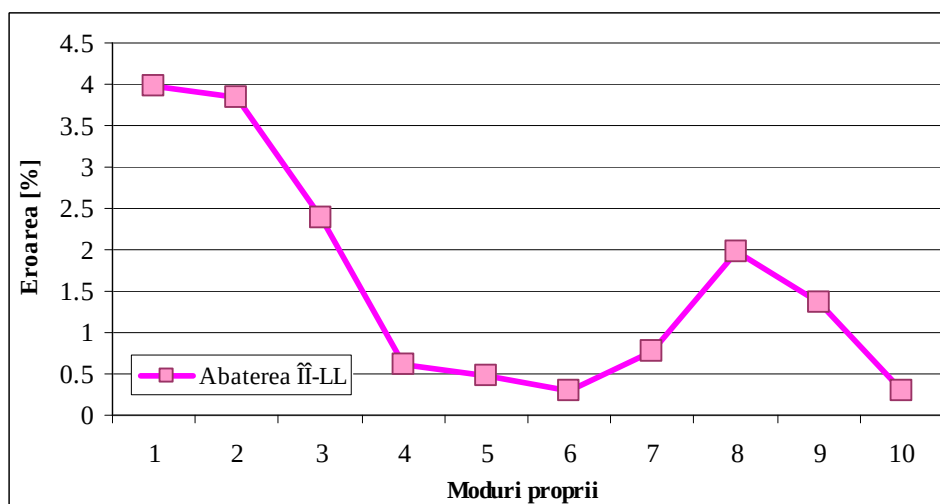


Fig. 3.17. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

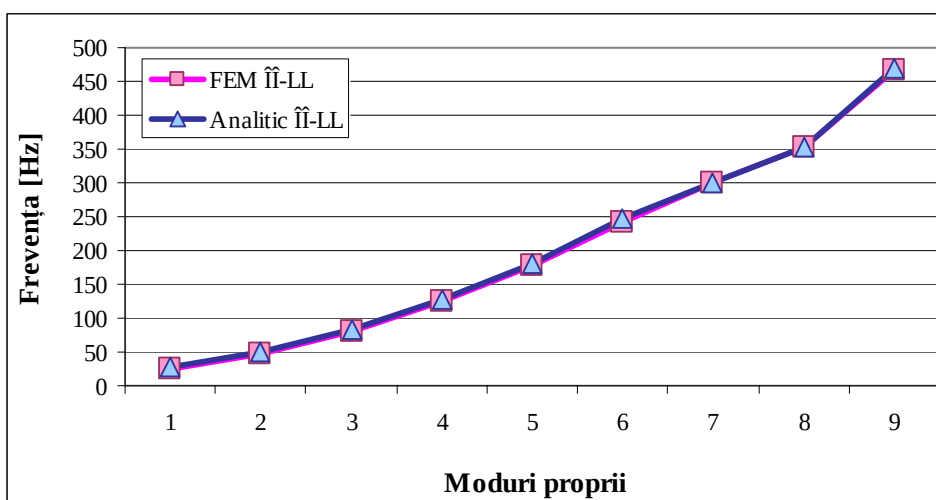


Fig. 3.18. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

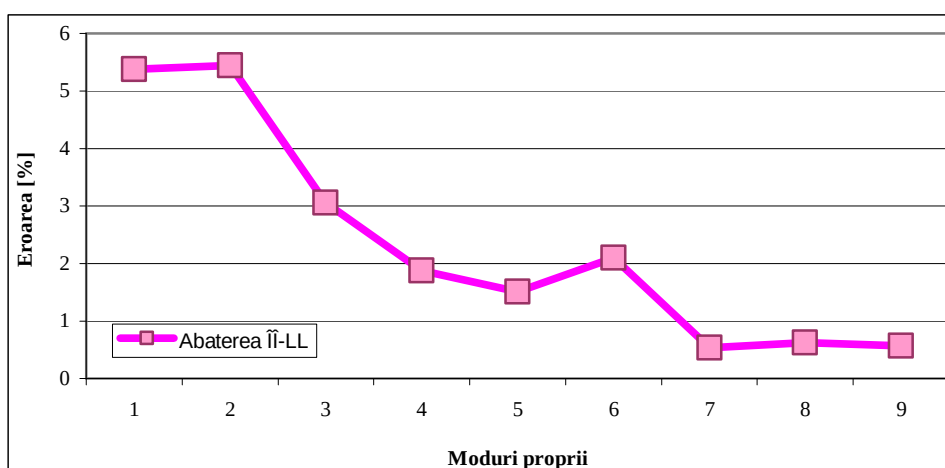


Fig. 3.19. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

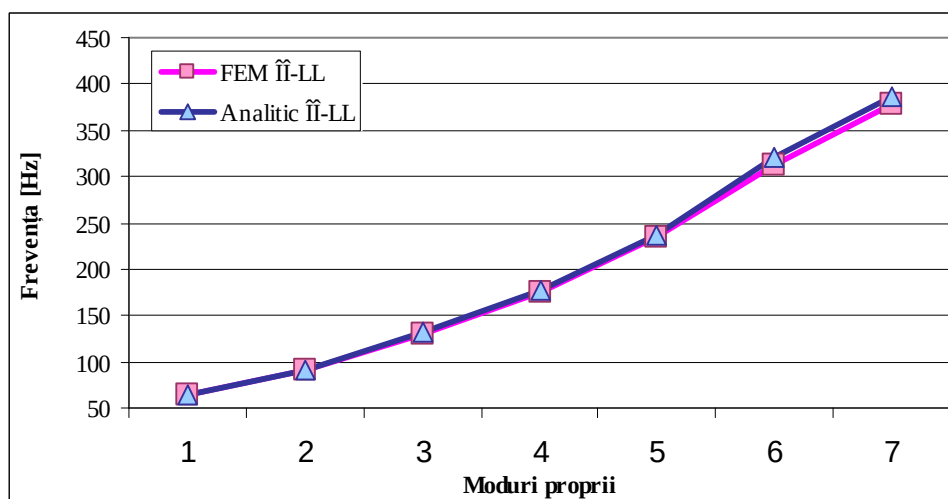


Fig. 3.20. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

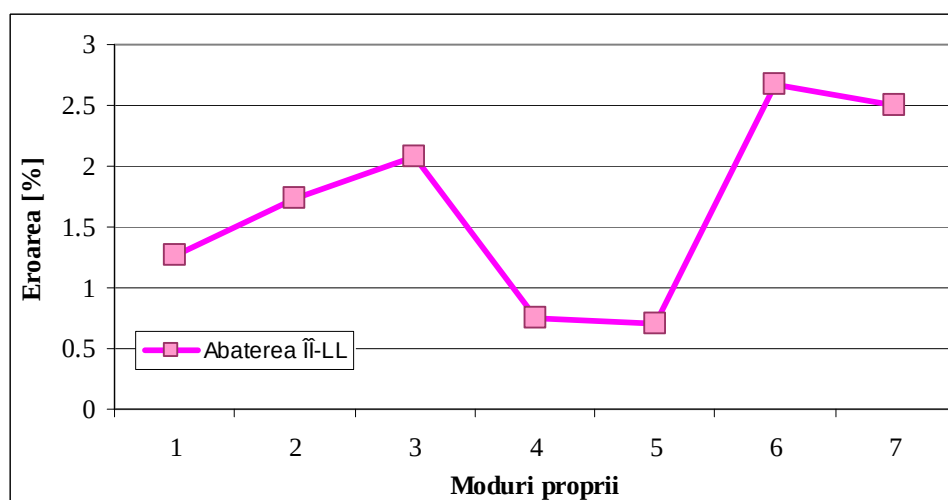


Fig. 3.21. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

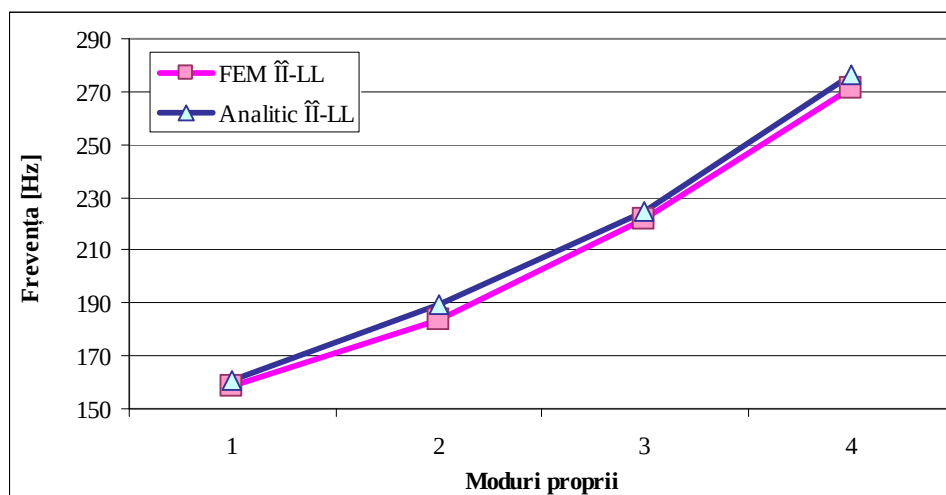


Fig. 3.22. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

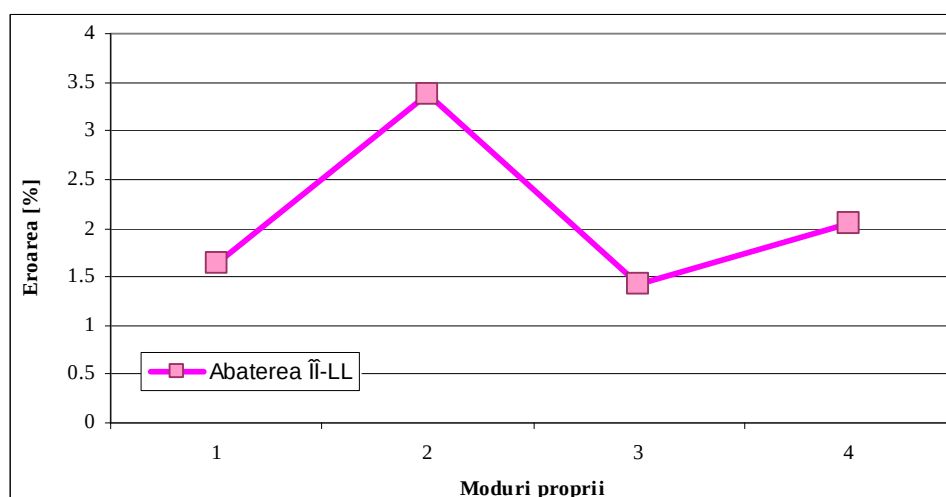


Fig. 3.23. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 3.17, 3.19, 3.21 și 3.23 și tabelele 3.8-3.11.se observă că eroarea maximă este de 5,45 % pentru modul $m=2$ și $n=2$. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la modul $m= 2$.

3.2.3 Analiza rezultatelor obținute pentru placa fără defecte simplu rezemată pe toate laturile

Pentru obținerea frecvențelor proprii ale plăcilor fără defect, s-a utilizat modulul de analiză modală al programului de analiză cu element finit SolidWorks. Au fost determinate primele 30 de frecvențe proprii de vibrație pentru toate plăcile studiate.

În fig.3.22 se prezintă zece moduri de vibrație obținute prin simulare cu element finit pentru o placă fără defect, cu tipul de rezemare simplu rezemat – simplu rezemat [53].

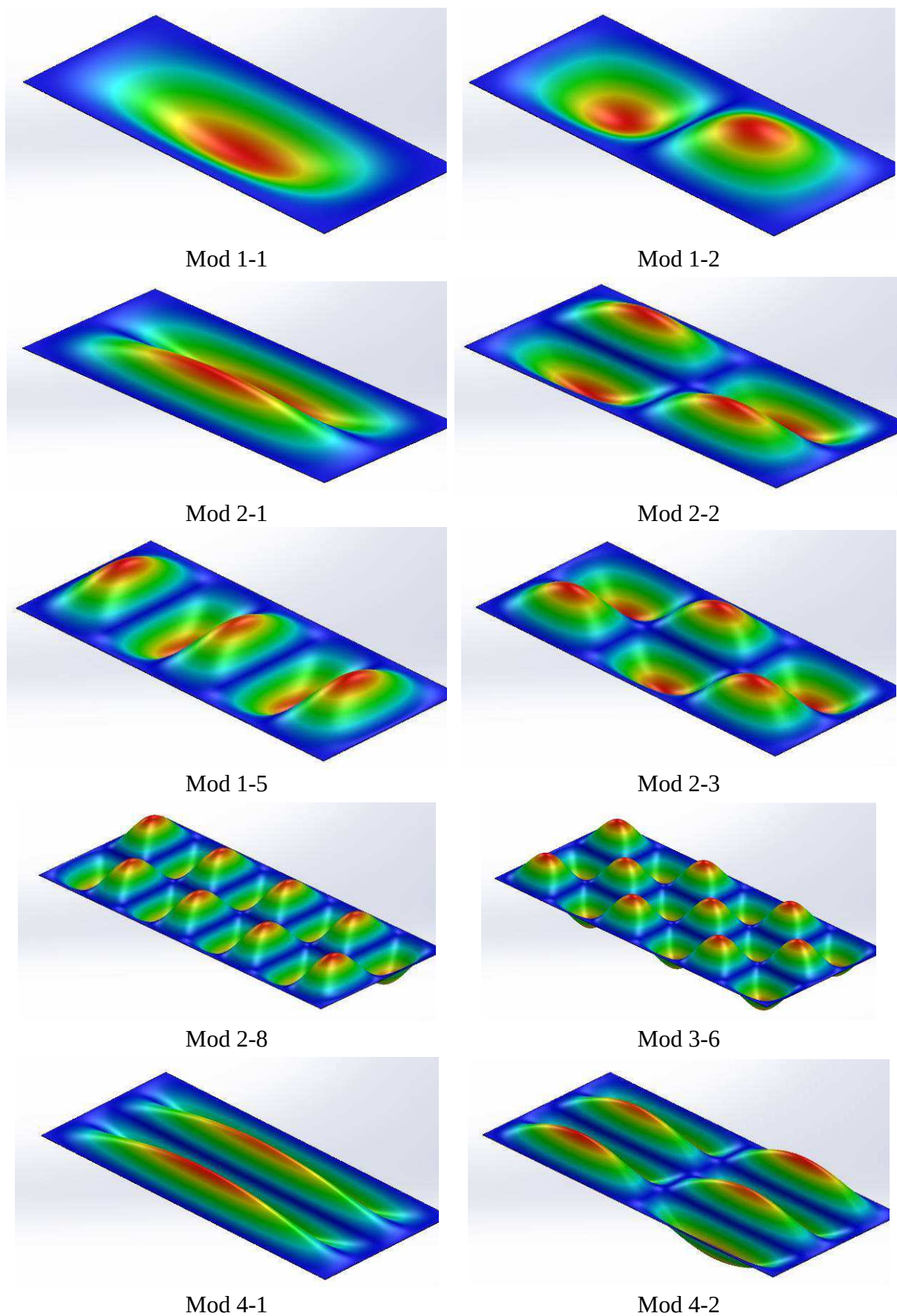


Fig. 3.24. Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare simplu rezemat – simplu rezemat

În urma simulării numerice s-au obținut frecvențele proprii pentru placa încastrată pe toate laturile în funcție de modurile de vibrație (tabelele 3.12-3.15., prima coloană). Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 3.12-3.15., coloana a 3-a.

Frecvențele proprii obținute prin FEM se compară cu frecvențele proprii determinate pe cale analitică (tabelele 3.12-3.15, coloana a 2-a), determinându-se abaterea procentuală (eroarea) cu relația (3.1). Valorile abaterii procentuale sunt prezentate în tabelele 3.12.-3.15, coloana a 4-a.

Tabelul 3.12. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
1-1	31,611146	31,209	1,2721652
1-2	46,921285	46,295	1,33475671
1-3	72,438184	71,475	1,32966337
1-4	108,16184	106,75	1,30530324
1-5	154,09226	152,1	1,29290076
1-6	210,22944	207,53	1,28404471
1-7	276,57337	273,03	1,28116818
1-8	353,12407	348,6	1,28115594
1-9	439,88153	434,22	1,2870579
1-10	536,84574	532,38	0,8318479

Tabelul 3.13. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=2$ și $n=1...7$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
2-1	111,13444	109,76	1,23673633
2-2	126,44458	124,82	1,28481585
2-3	151,96148	149,94	1,33025817
2-4	187,68514	185,15	1,35074093
2-5	233,61556	230,44	1,35931014
2-6	289,75274	285,81	1,3607257
2-7	356,09667	351,27	1,35543812
2-8	432,64737	428,79	0,89157366
2-9	519,40483	516,69	0,52268093

Tabelul 3.14. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=2$ și $n=1\dots 9$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
3-1	243,67327	240,64	1,24481032
3-2	258,98341	255,69	1,27166833
3-3	284,50031	280,78	1,30766466
3-4	320,22397	315,92	1,34404992
3-5	366,15439	361,14	1,36947423
3-6	422,29157	416,44	1,38567057
3-7	488,6355	481,81	1,39684898

Tabelul 3.15. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=4$ și $n=1\dots 4$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
4-1	429,22764	423,8	1,26451316
4-2	444,53777	438,84	1,28172911
4-3	470,05467	463,9	1,30935195
4-4	505,77833	499,02	1,33622372

În figurile 3.25, 3.27, 3.29 și 3.31 se prezintă variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru cazurile analizate, iar în figurile 3.26, 3.28, 3.30 și 3.32 se prezintă abaterea procentuală a frecvenței față de frecvența determinată analitic, în funcție de modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

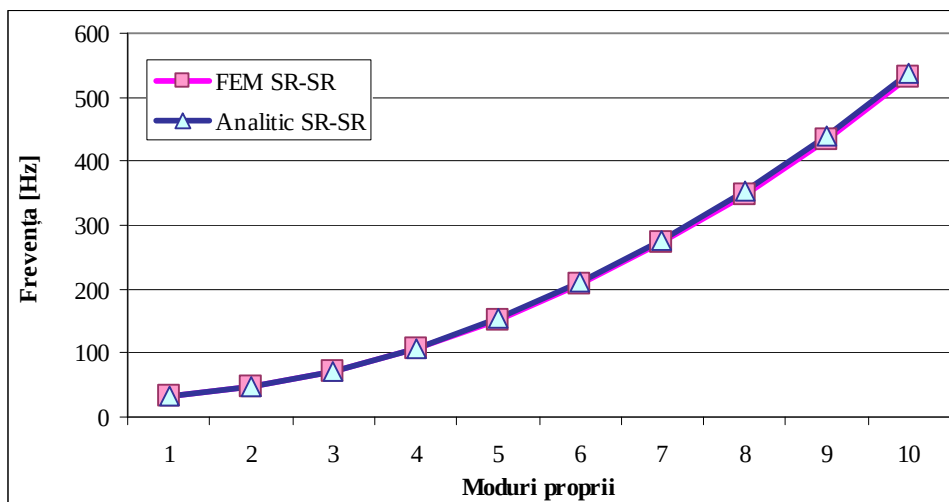


Fig. 3.25. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

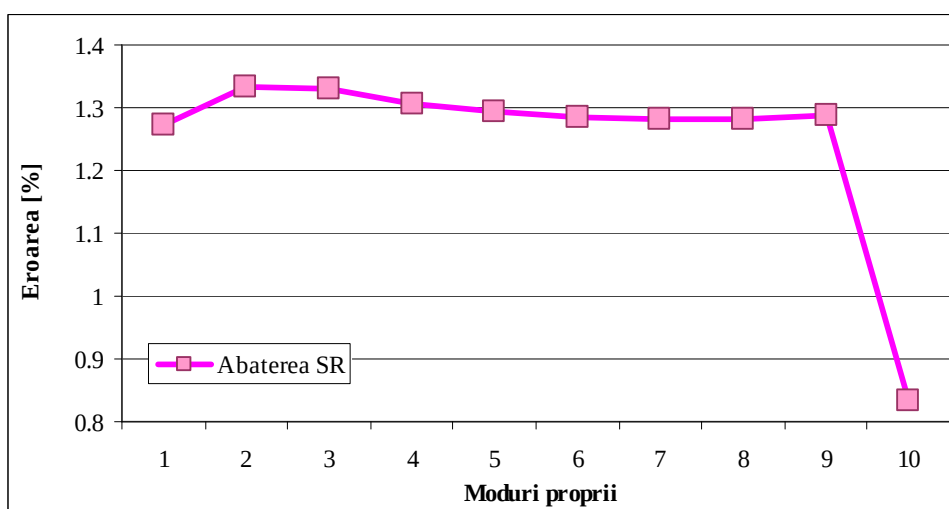


Fig. 3.26. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

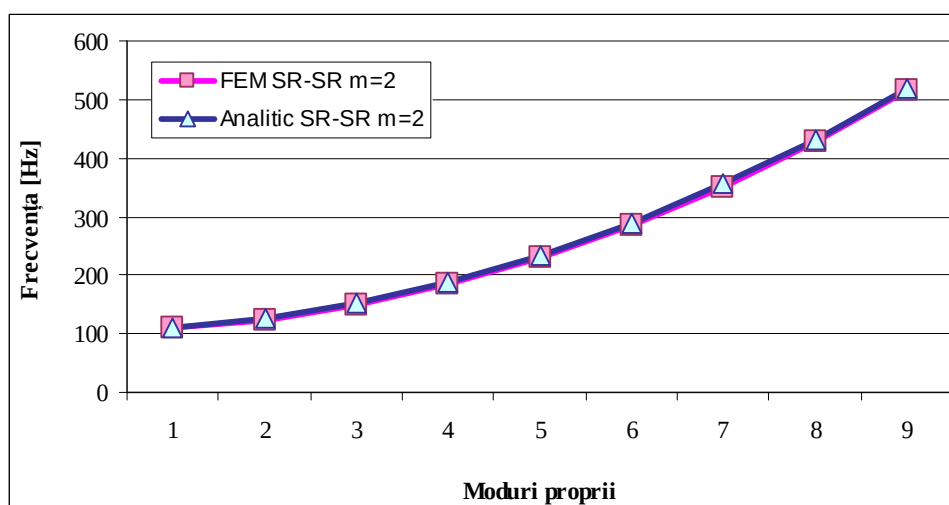


Fig. 3.27. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

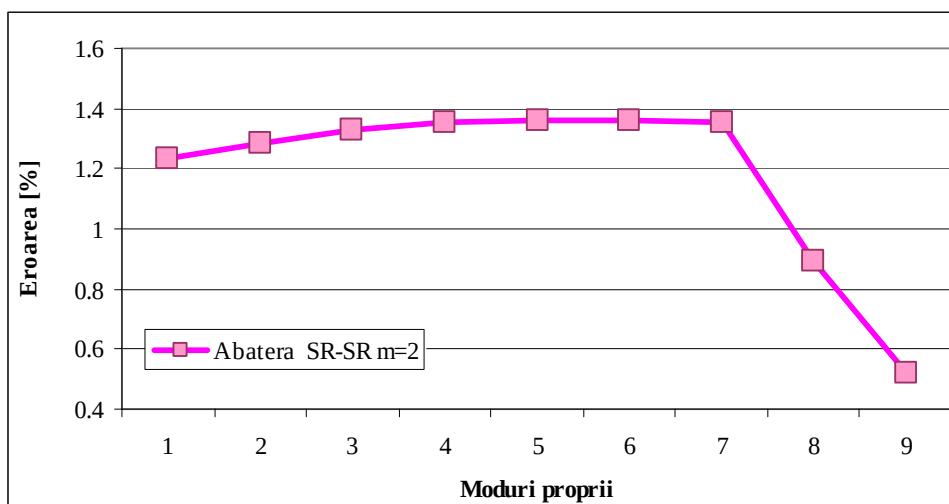


Fig. 3.28. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

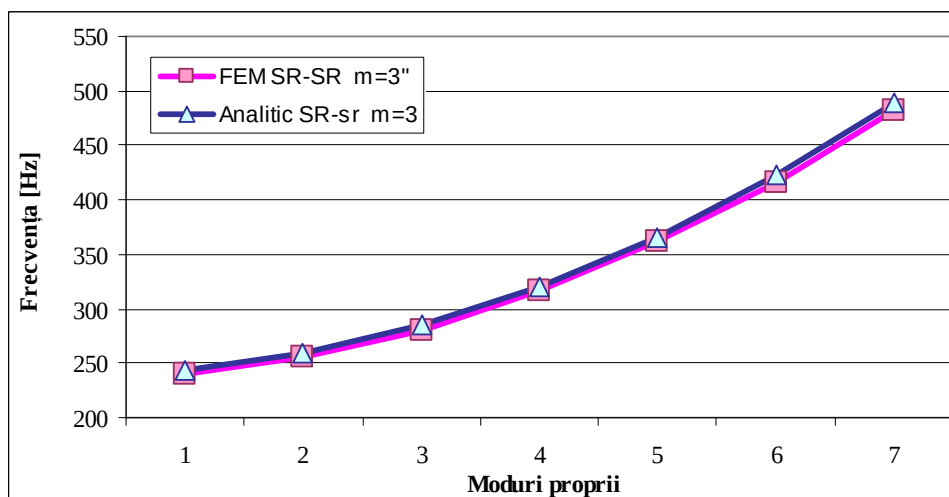


Fig. 3.29. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

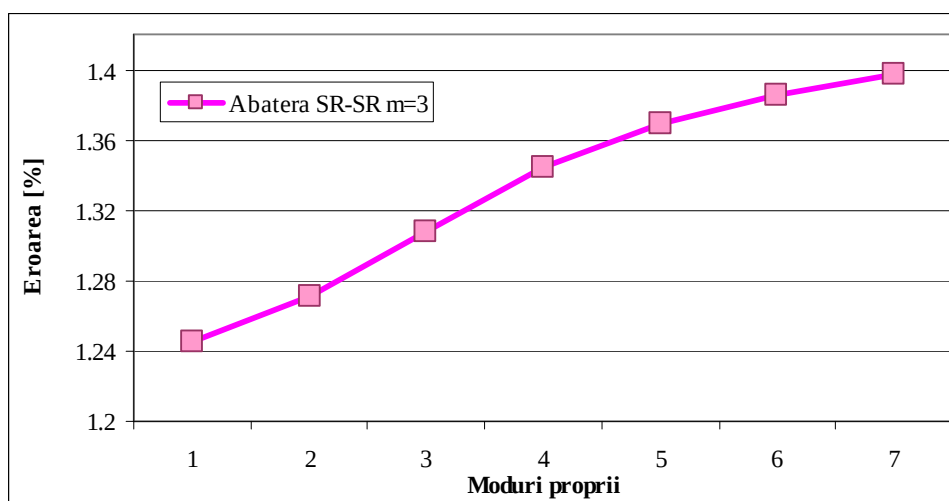


Fig. 3.30. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

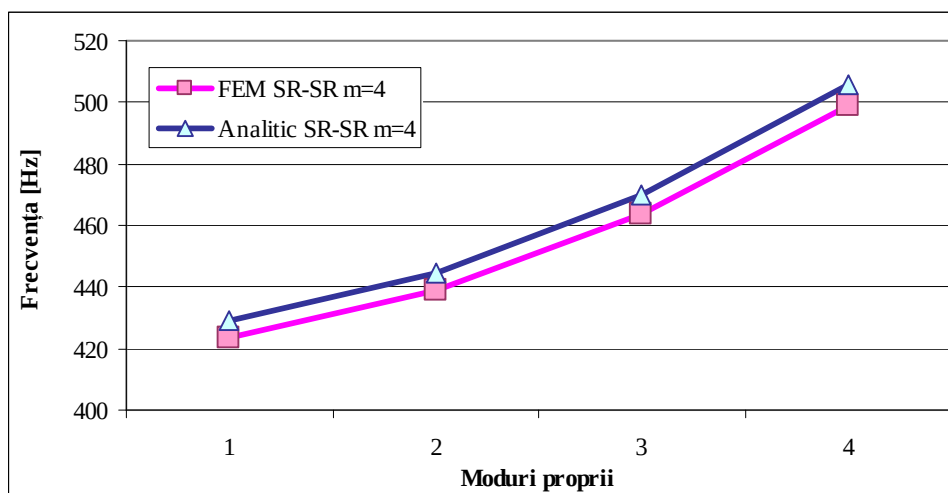


Fig. 3.31. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

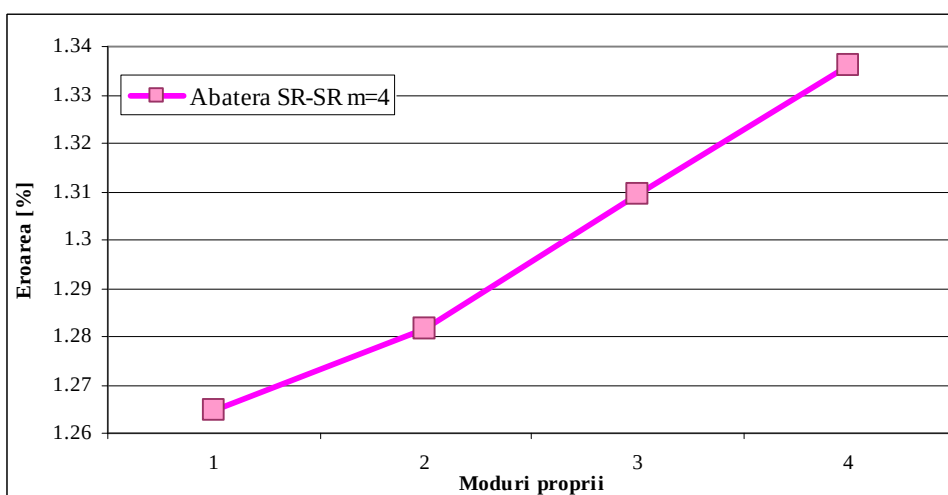


Fig. 3.32. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 3.26, 3.28, 3.30 și 3.32 și tabelele 3.12.-3.15. se observă că eroarea maximă este de 1,39 % pentru modul $m=3$ și $n=7$. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la modul $m= 3$.

3.2.4 Analiza rezultatelor obținute pentru placa fără defecte simplu rezemată pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi

Pentru obținerea frecvențelor proprii ale plăcilor fără defect, s-a utilizat modulul de analiză modală al programului de analiză cu element finit SolidWorks. Au fost determinate primele 30 de frecvențe proprii de vibrație pentru toate plăcile studiate.

În fig. 3.31 se prezintă zece moduri de vibrație obținute prin simulare cu element finit pentru o placă fără defect cu tipul de rezemare simplu rezemat-liber [47].

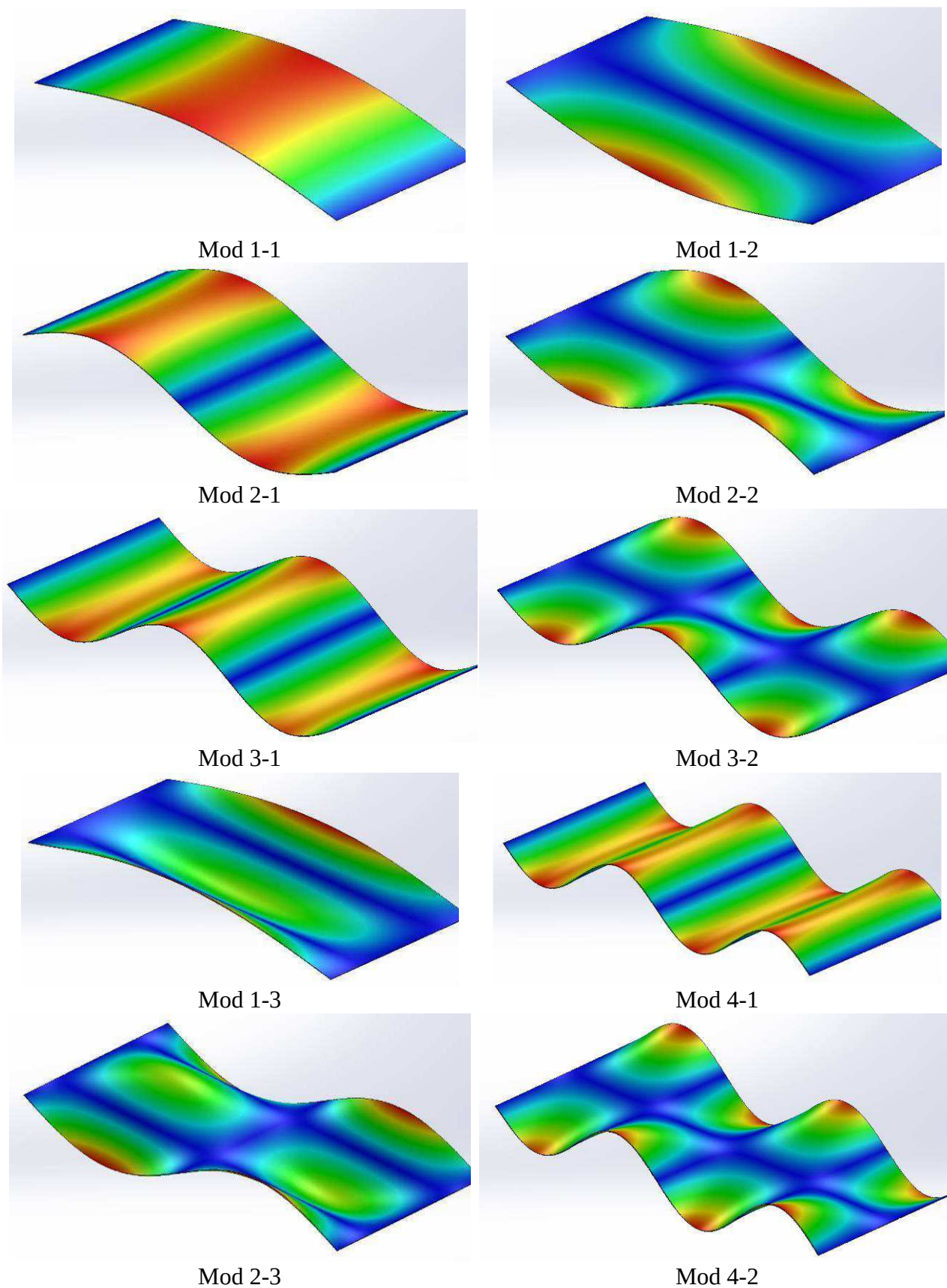


Fig. 3.33. Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare rezemat-liber

În urma simulării numerice s-au obținut frecvențele proprii pentru placa încastrată pe toate laturile în funcție de modurile de vibrație (tabelele 3.16-3.19, prima coloană). Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 3.16-3.19, coloana a 3-a.

Frecvențele proprii obținute prin FEM se compară cu frecvențele proprii determinate pe cale analitică (tabelele 3.16-3.19, coloana a 2-a), determinându-se abaterea procentuală (eroarea) cu relația (3.1).

Valorile abaterii procentuale sunt prezentate în tabelele 3.16-3.19, coloana a 4-a.

Tabelul 3.16. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
1-1	6,6161223	6,124	7,438
1-2	13,339423	12,684	4,913
1-3	37,113013	36,916	0,531
1-4	73,300285	72,552	1,021
1-5	121,65926	121	0,542
1-6	182,14427	179,59	1,402
1-7	254,74171	249,29	2,14
1-8	339,44638	334,3	1,516
1-9	436,25595	431,23	1,152
1-10	545,16924	540,19	0,913

Tabelul 3.17. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=4$ și $n=1...4$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
2-1	21,926262	19,224	8,543
2-2	28,649562	25,375	4,449
2-3	52,423152	48,177	8,1
2-4	88,610424	84,881	4,209
2-5	136,9694	132,77	3,066
2-6	197,45441	195,89	0,792
2-7	270,05185	262,77	2,696
2-8	354,75652	350,67	1,152
2-9	451,56609	448,43	0,694

Tabelul 3.18. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=2$ și $n=1\dots 9$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	E [%]
3-1	47,443161	46,547	1,889
3-2	54,166461	53,122	1,928
3-3	77,940051	76,79	1,476
3-4	114,12732	112,16	1,724
3-5	162,4863	160,36	1,309
3-6	222,97131	219,54	1,539
3-7	295,56875	289,34	2,107

Tabelul 3.19. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=3$ și $n=1\dots 7$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
4-1	83,166819	82,65	0,621
4-2	89,890119	88,54	1,502
4-3	113,66371	112,49	1,033
4-4	149,85098	148,09	1,175

În figurile 3.34, 3.36, 3.38 și 3.40 se prezintă variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru cazurile analizate, iar în figurile 3.35, 3.37, 3.39 și 3.41 se prezintă abaterea procentuală a frecvenței față de frecvența determinată analitic, în funcție de modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

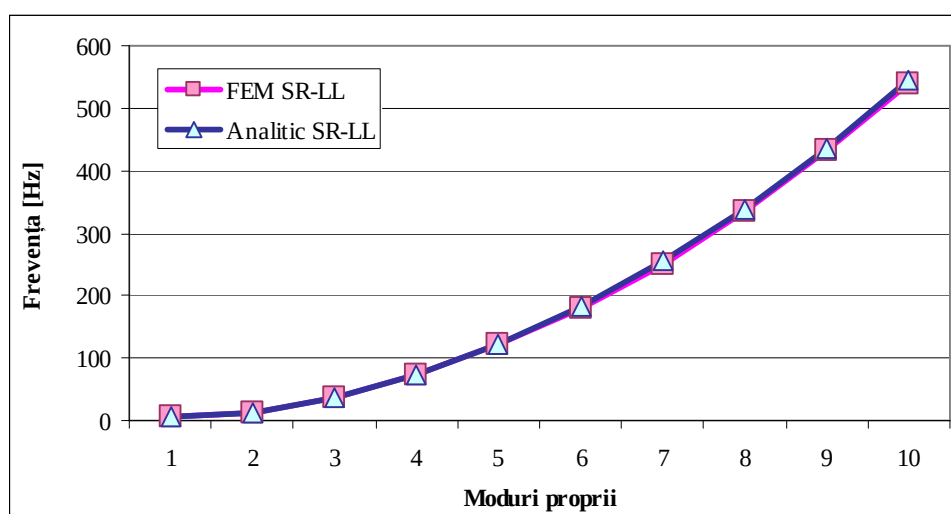


Fig. 3.34. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\dots 10$

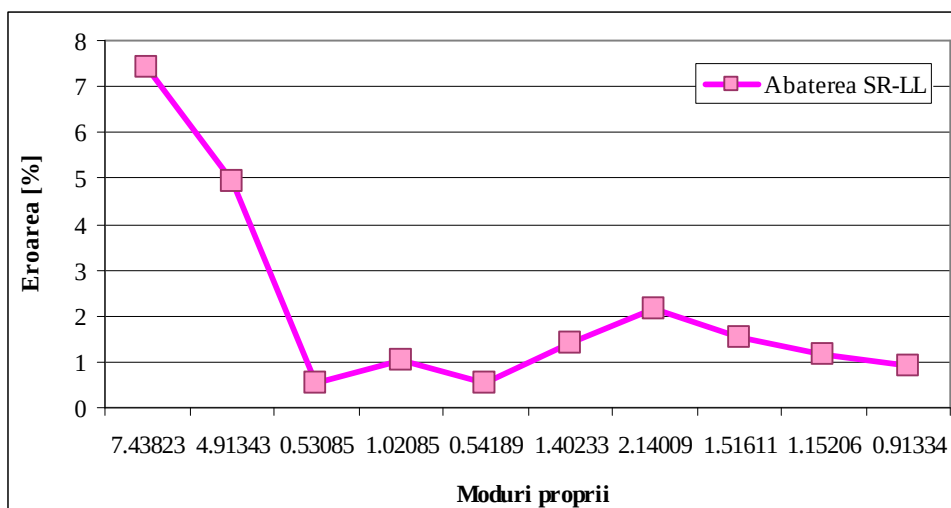


Fig. 3.35. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

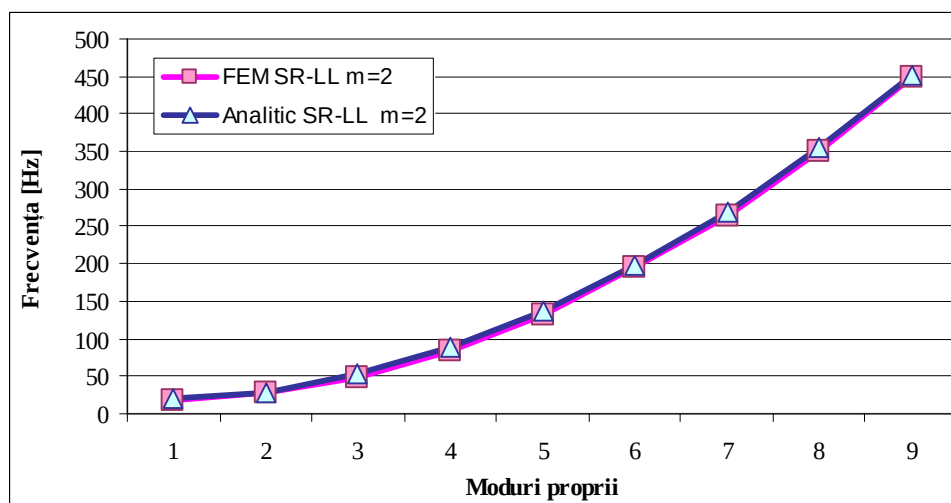


Fig. 3.36. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

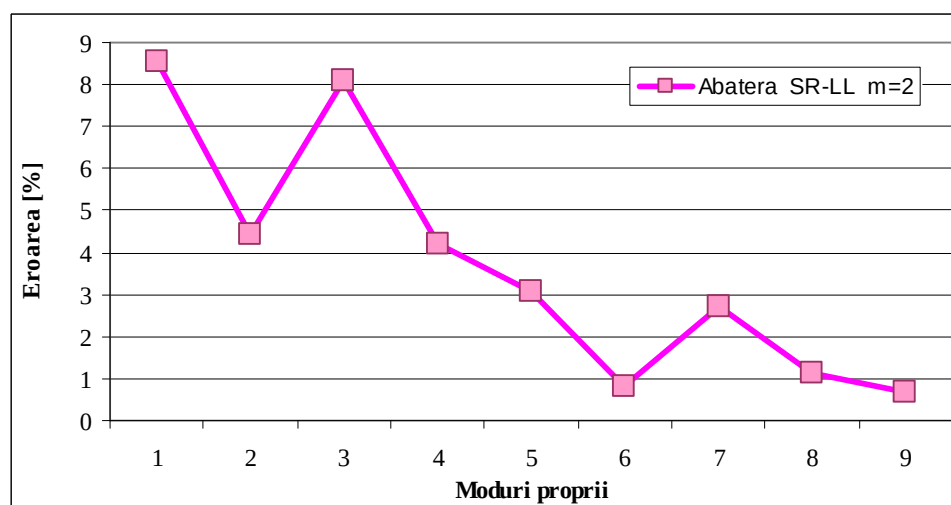


Fig. 3.37. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

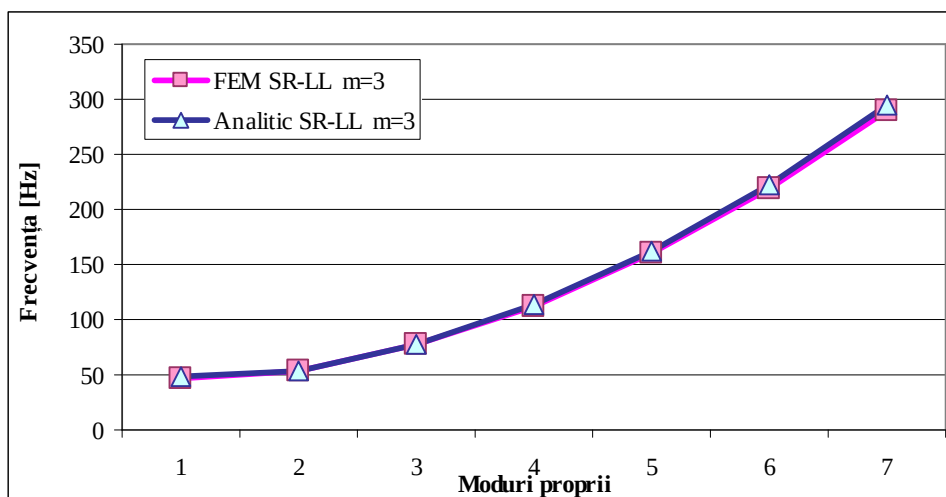


Fig. 3.38. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

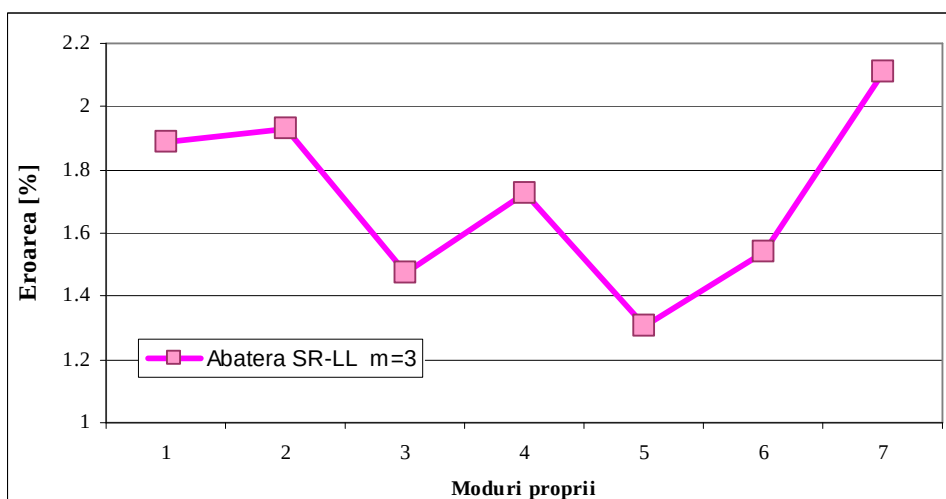


Fig. 3.39. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

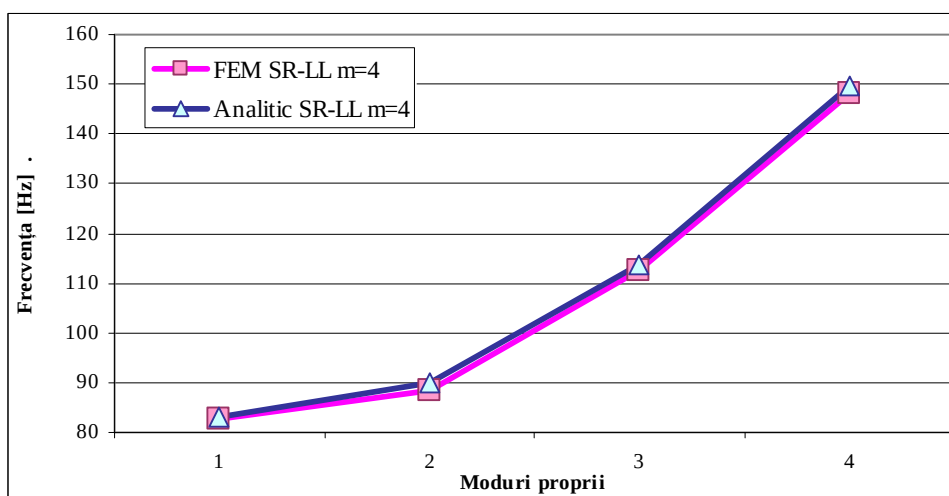


Fig. 3.40. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

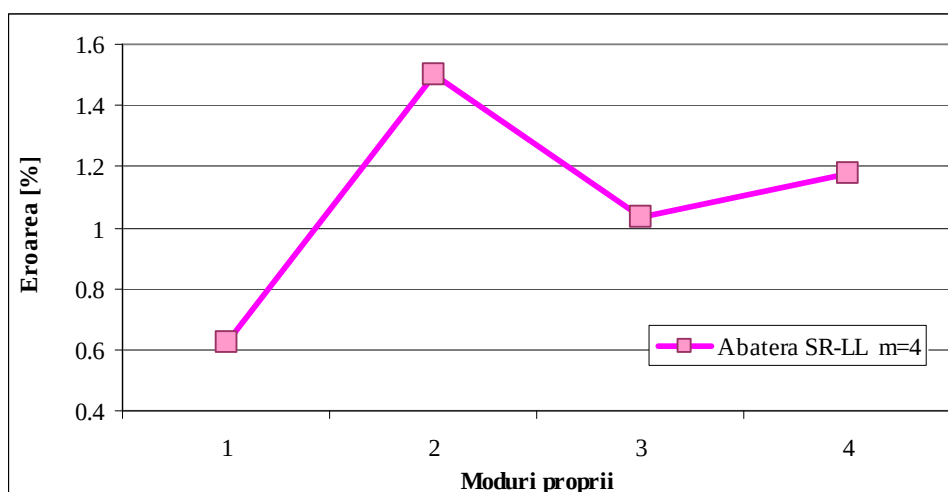


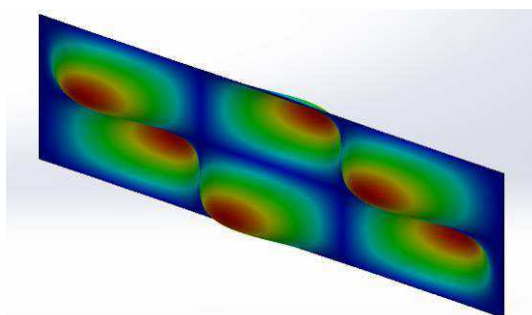
Fig. 3.41. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1 \div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 3.35, 3.37, 3.39, 3.41 și tabelele 3.16-3.19 se observă că eroarea maximă este de 8,54 % pentru modul $m=2$ și $n=1$. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la modul $m=2$.

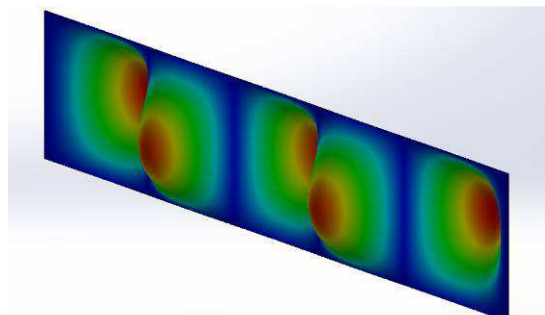
3.2.5 Analiza rezultatelor obținute pentru placa fără defecte încastrată pe două laturi paralele și simplu rezemată pe celelalte două laturi

Pentru obținerea frecvențelor proprii ale plăcilor fără defect, s-a utilizat modulul de analiză modală al programului de analiză cu element finit SolidWorks. Au fost determinate primele 30 de frecvențe proprii de vibrație pentru toate placile studiate.

În fig. 3.42 se prezintă zece moduri de vibrație obținute prin simulare cu element finit pentru o placă fără defect cu tipul de rezemare încastrat-simplu rezemat [53].

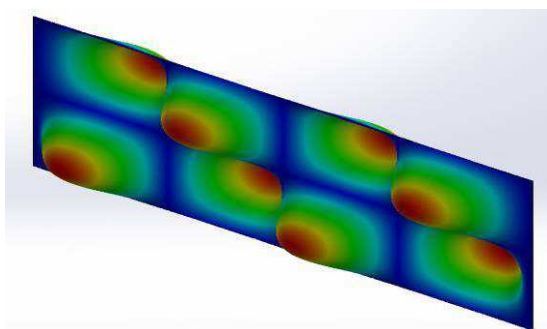


Mod 2-3

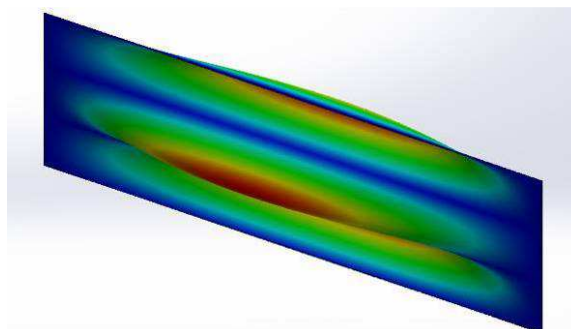


Mod 1-5

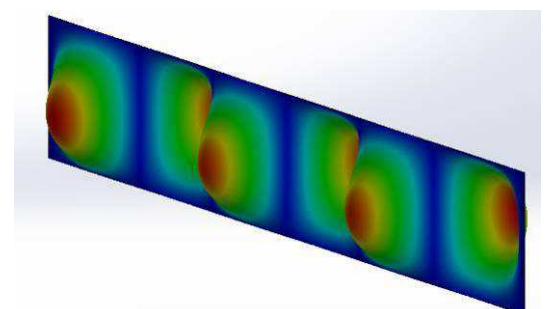
Fig. 3.42. Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare încastrat-simplu rezemat



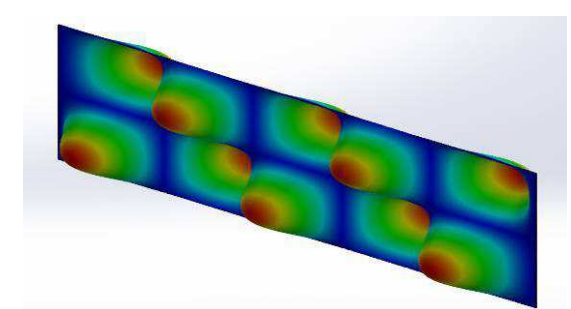
Mod 2-4



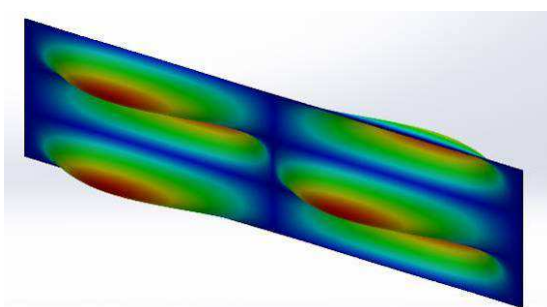
Mod 3-1



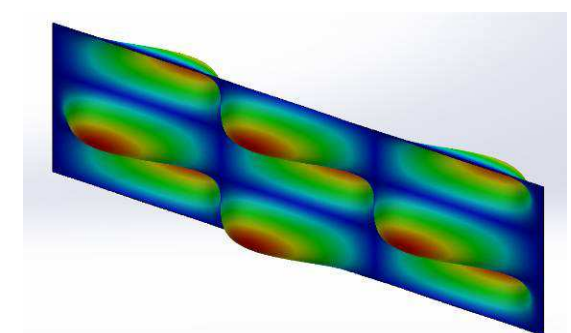
Mod 1-6



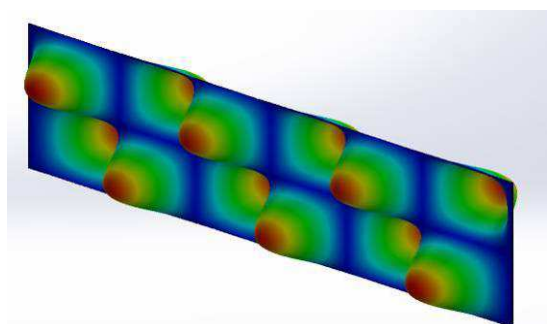
Mod 2-5



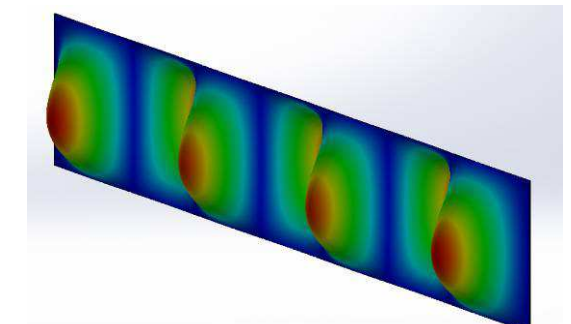
Mod 3-2



Mod 3-3



Mod 2-6



Mod 1-7

Fig. 3.42. Exemple de moduri de vibrație determinate cu FEM pentru tipul de rezemare încastrat-simplu rezemat (continuare)

În urma simulării numerice s-au obținut frecvențele proprii pentru placa încastrată pe toate laturile, în funcție de modurile de vibrație (tabelele 3.20-3.23, prima coloană). Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 3.20-3.23, coloana a 3-a.

Frecvențele proprii obținute prin FEM se compară cu frecvențele proprii determinate pe cale analitică (tabelele 3.20-3.23, coloana a 2-a), determinându-se abaterea procentuală (eroarea) cu relația (3.1).

Valorile abaterii procentuale sunt prezentate în tabelele 3.20-3.23, coloana a 4-a

Tabelul 3.20. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=1$ și $n=1 \dots 10$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
1-1	36,423154	36,043	1,04371521
1-2	58,146304	57,582	0,97048989
1-3	90,731031	89,282	1,5970622
1-4	134,17733	132,68	1,11593367
1-5	188,48521	185,7	1,47768093
1-6	253,65466	251,37	0,90069703
1-7	329,68569	324,68	1,51832189
1-8	416,5783	413,65	0,70294108
1-9	514,33247	505,16	1,7833737
1-10	622,94823	618,28	0,74937688

Tabelul 3.21. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=2$ și $n=1 \dots 9$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
2-1	109,0348	107,3	1,59105166
2-2	130,75795	129,85	0,69437461
2-3	163,34267	160,46	1,76479912
2-4	206,78898	205,45	0,64751033
2-5	261,09685	258,45	1,0137426
2-6	326,26631	325,25	0,31149707
2-7	402,29733	396,78	1,37145578
2-8	489,18994	486,98	0,451755
2-9	586,94412	573,84	2,23260095

Tabelul 3.22. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=3$ și $n=1...7$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	ε [%]
3-1	230,0542	228,35	0,74078195
3-2	251,77735	248,78	1,19047643
3-3	284,36208	282,17	0,77087634
3-4	327,80838	322,18	1,71697258
3-5	382,11626	379,48	0,68991045
3-6	447,28571	439,86	1,66017153
3-7	523,31674	520,41	0,55544564

Tabelul 3.23. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile $m=4$ și $n=1...4$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	E [%]
4-1	399,48137	396,37	1,63633374
4-2	421,20452	416,2	3,37488868
4-3	453,78925	445,77	1,42761025
4-4	497,23555	485,73	2,05660528

În figurile 3.43, 3.45, 3.47 și 3.49 se prezintă variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru cazurile analizate, iar în figurile 3.44, 3.46, 3.48 și 3.50 se prezintă abaterea procentuală a frecvenței față de frecvența determinată analitic, în funcție de modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

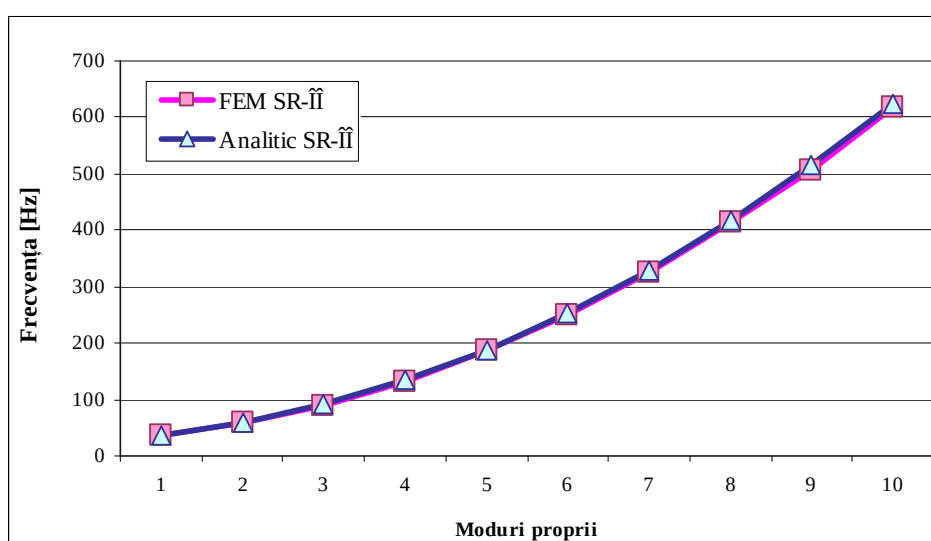


Fig. 3.43. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

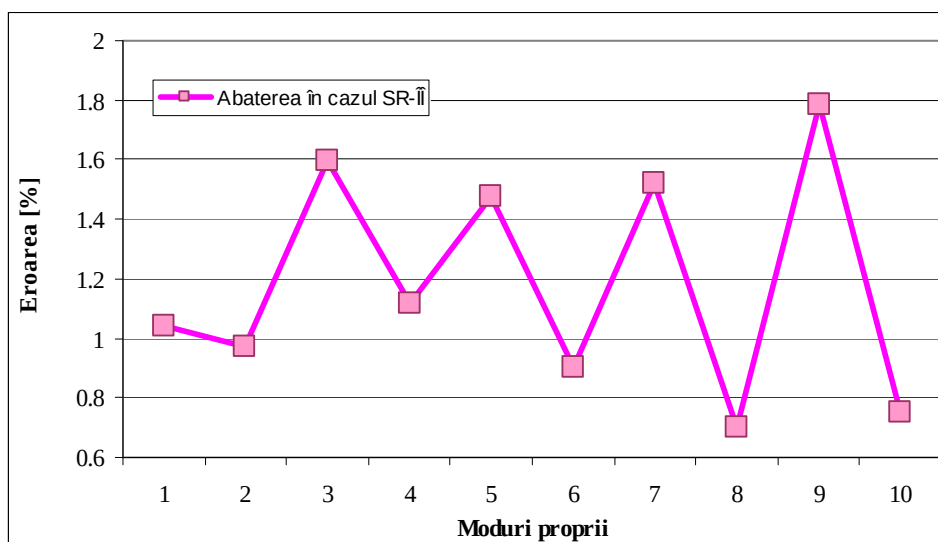


Fig. 3.44. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

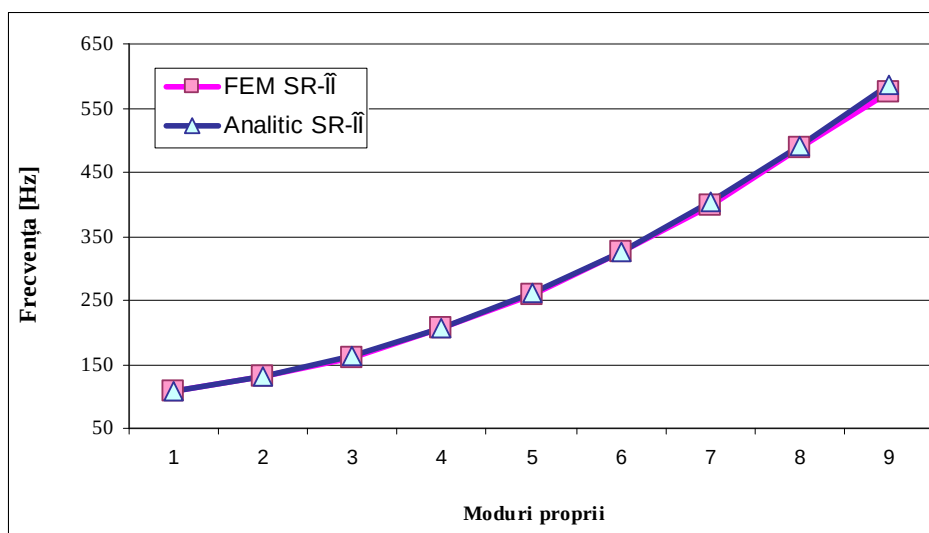


Fig. 3.45. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

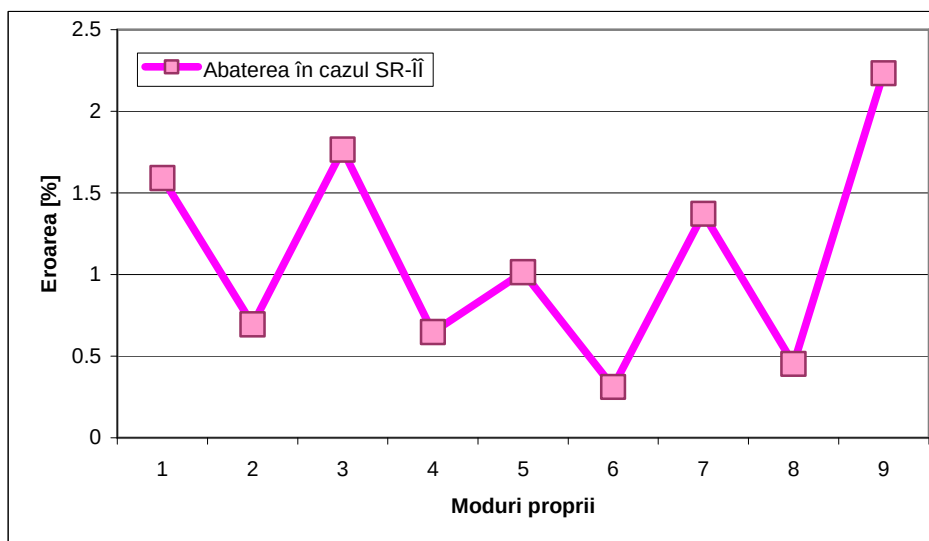


Fig. 3.46. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

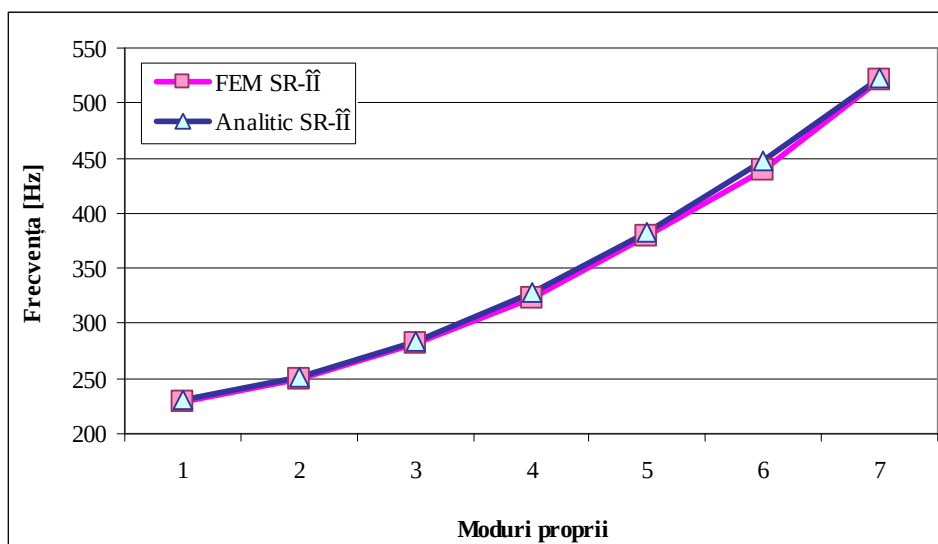


Fig. 3.47. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

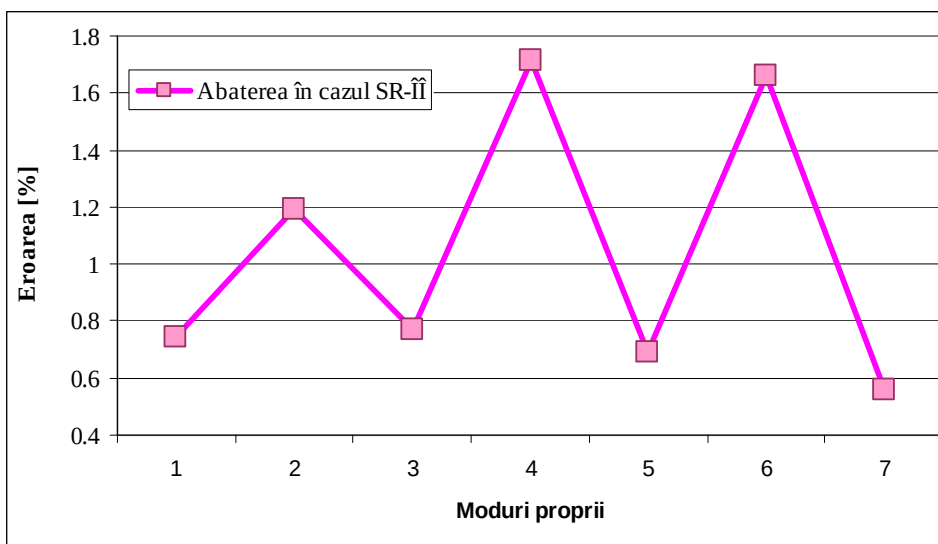


Fig. 3.48. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

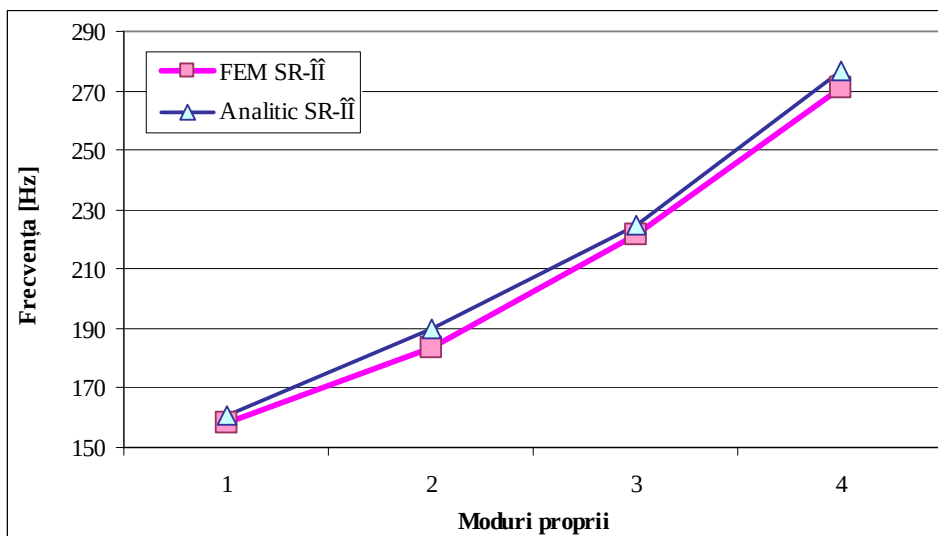


Fig. 3.49. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

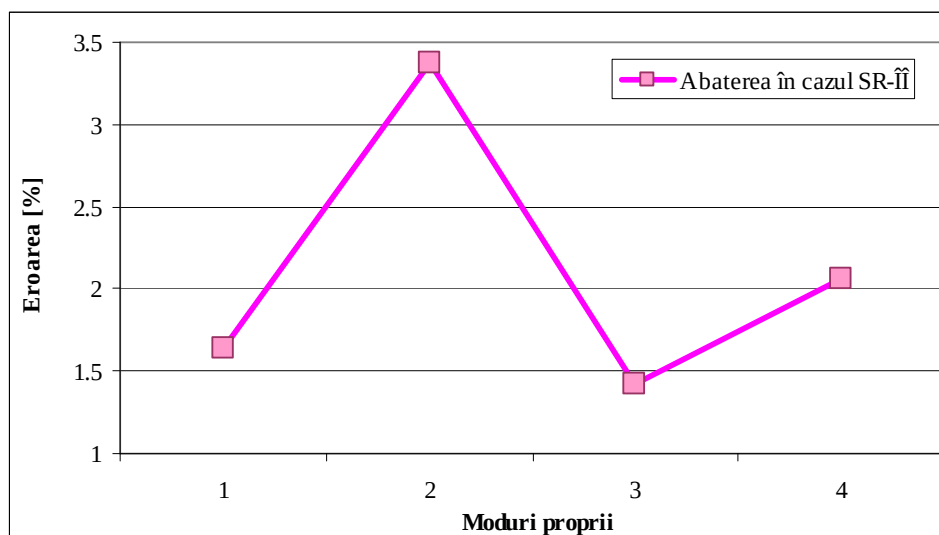


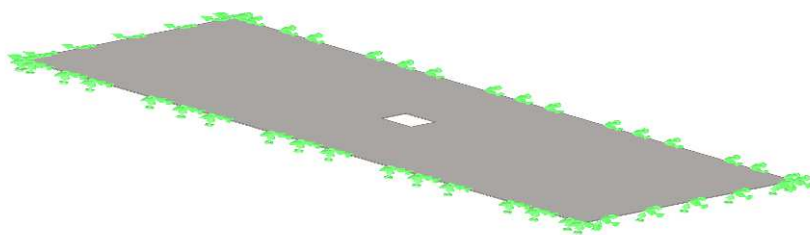
Fig. 3.50. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 3.44, 3.46, 3.48 și 3.50 și tabelele 3.20-3.23 se observă că eroarea maximă este de 2,23 % pentru modul $m=2$ și $n=9$. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la modul $m=2$.

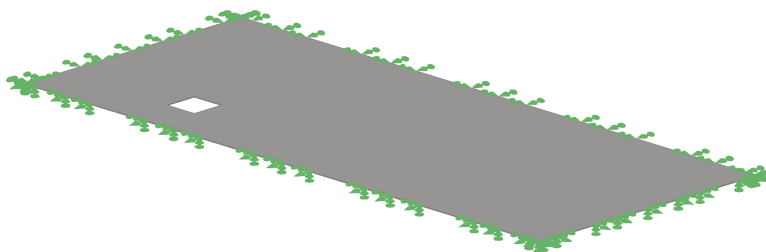
3.3. Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile cu defecte încastrate pe toate laturile

Pentru analiza modală a plăcilor cu defect s-a utilizat de asemenea metoda elementului finit (FEM) [40, 47, 48, 49, 53, 78, 81, 110, 111], folosind programul SolidWorks. Modelarea geometriei de analizat a fost făcută în modulul Geometry al aceluiași program. Pentru obținerea frecvențelor proprii s-a folosit modulul de analiză statică pentru plăci subțiri rectangulare sub acțiunea greutateii proprii. Rezultatele obținute în acest modul au fost transferate în modulul de analiză modală, temperatura mediului ambiant fiind de 20 °C. Prin analiza modală au fost determinate primele 30 de frecvențe proprii. Discretizarea modelului 3D [47, 48, 49, 53, 60, 65, 78, 110, 111] s-a făcut cu elemente finite tetraedrale cu dimensiunea elementului de 2 mm (tabelul 3.24.), materialul utilizat din baza de date a programului fiind identic cu cel utilizat în subcapitolul precedent.

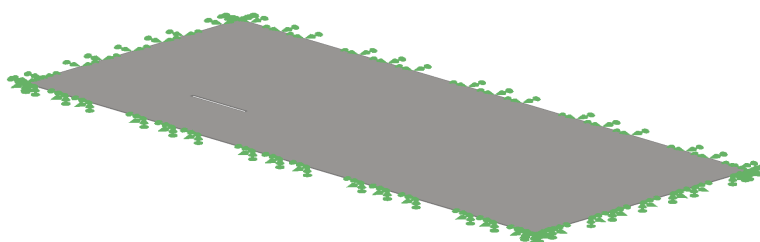
În figura 3.51 se prezintă cinci tipuri de plăci cu defect încastrate pe contur, utilizate în analiza modală cu metoda elementului finit.



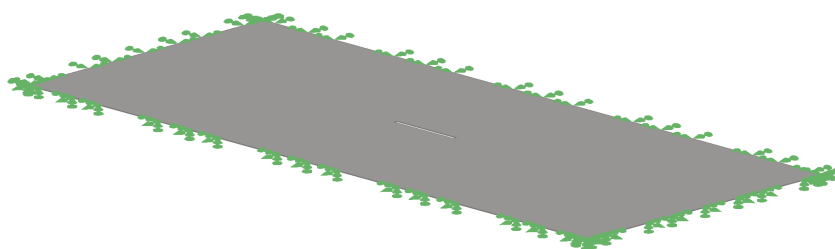
a) defect central de formă pătrat



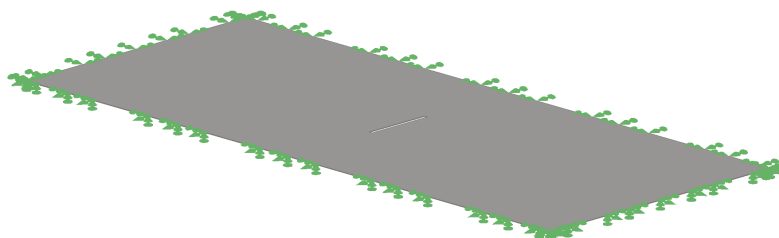
b) defect lateral de formă pătrat



c) defect lateral longitudinal



d) defect central longitudinal



e) defect central transversal

Fig. 3.51. Tipuri de rezemare pentru placa cu defect central sau lateral

Tabelul 3.24. Informații de discretizare pentru plăcile cu defect

Tipul de placă	Numărul de noduri	Numărul de elemente	Timpul de discretizare [min]
Fără defect	2.489.930	1.476.647	04:42
Cu defect central longitudinal 5×25 mm	2.477.378	1.437.411	04:35
Cu defect central longitudinal 5×50 mm	2.517.888	1.467.061	04:38
Cu defect central longitudinal 5×75 mm	2.510.268	1.460.333	05:25
Cu defect central longitudinal 5×100 mm	2.763.438	1.648.846	05:25
Cu defect central transversal 5×25 mm	2.693.349	1.593.738	05:35
Cu defect central transversal 5×50 mm	2.662.646	1.568.556	04:12
Cu defect central longitudinal 5×75 mm	2.594.625	1.475.058	04:55
Cu defect central longitudinal 5×100 mm	2.661.254	1.564.212	04:58
Cu defect lateral 5×25 mm	2.498.588	1.555.544	05:12
Cu defect lateral 5×50 mm	2.564.232	1.578.521	05:22
Cu defect lateral 5×75 mm	2.488.512	1,649.322	05:18
Cu defect lateral 5×100 mm	2.654.544	1.545.622	05:14

3.3.1 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile încastrate pe toate laturile cu defect central longitudinal

În fig.3.50 se prezintă zece moduri de vibrație obținute prin simulare cu element finit pentru o placă cu defect central longitudinal încastrată pe contur [22,53].

În urma simulării numerice s-au obținut frecvențele proprii pentru o placă reală încastrată pe contur, în funcție de modurile proprii de vibrație cu defect central longitudinal, având dimensiunile: 5,3×24,8 mm; 5,8×48,8 mm; 6,05×75,2 mm; 4,9×101,6 mm. Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 3.25-3.28, iar valorile abaterii procentuale calculate cu formula (3.1) sunt prezentate în tabelele 3.29-3.32, pentru fiecare caz analizat.

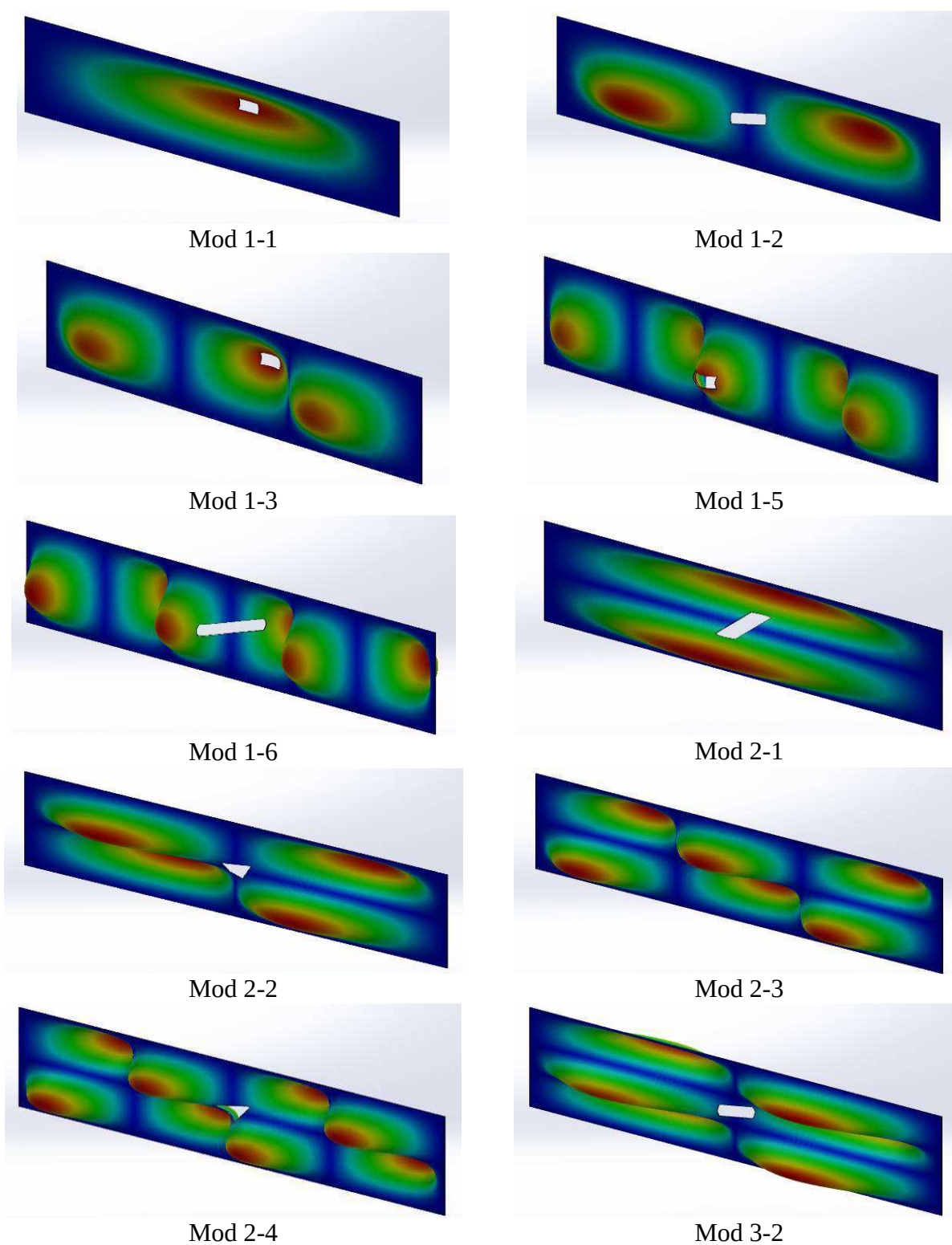


Fig. 3.52. Exemple de moduri de vibrație pentru placa cu defect central 50×50 mm

Tabelul 3.25. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5,3×24,8 mm	Defect 5,8×48,8mm	Defect 6,05×75,2mm	Defect 4,9×101,6mm
1-1	73,047	72,903	72,497	71,846	70,922
1-2	87,541	87,54	87,535	87,529	87,491
1-3	113,94	113,81	113,49	113,01	112,45
1-4	152,73	152,73	152,71	152,68	152,57
1-5	203,54	203,38	203,08	202,67	202,25
1-6	265,93	265,92	265,86	265,79	265,57
1-7	339,59	339,38	339,03	338,47	337,69
1-8	424,31	424,27	424,16	423,99	423,7
1-9	519,99	519,75	519,51	519,33	519,31
1-10	626,5	626,47	626,32	625,97	625,67

Tabelul 3.26. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1...9$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5,3×24,8 mm	Defect 5,8×48,8mm	Defect 6,05×75,2mm	Defect 4,9×101,6mm
2-1	193,99	193,96	193,82	193,39	192,51
2-2	208,78	208,75	208,71	208,66	208,63
2-3	234,18	234,15	233,98	233,42	232,2
2-4	270,78	270,68	270,57	270,46	270,34
2-5	318,91	318,88	318,64	317,8	315,86
2-6	378,66	378,53	378,37	378,21	377,89
2-7	449,92	449,87	449,54	448,25	445,01
2-8	532,56	532,42	532,23	532,04	531,06
2-9	626,45	626,26	626,03	625,14	624,36

Tabelul 3.27. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1...7$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5,3×24,8 mm	Defect 5,8×48,8mm	Defect 6,05×75,2mm	Defect 4,9×101,6mm
3-1	375,67	374,56	371,64	366,91	359,92
3-2	390,69	390,68	390,65	390,6	390,39
3-3	416,07	415,12	413	410,37	407,87
3-4	452,15	452,11	452	451,86	451,18
3-5	499,21	498,38	496,55	494,18	492,24
3-6	557,51	557,44	557,23	556,95	555,77
3-7	627,11	626,41	624,93	622,95	621,74

Tabelul 3.28. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1...4$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5,3×24,8 mm	Defect 5,8×48,8mm	Defect 6,05×75,2mm	Defect 4,9×101,6mm
4-1	617,59	617,31	615,73	608,99	583,47
4-2	632,81	632,78	632,73	632,66	632,49
4-3	658,33	658,06	656,69	652,47	645,58
4-4	694,4	694,23	694,13	693,84	693,06

Tabelul 3.29. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central longitudinal pentru $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	ε [%]			
	Defect 5,3×24,8 mm	Defect 5,8×48,8mm	Defect 6,05×75,2mm	Defect 4,9×101,6mm
1-1	0,197133	0,7529	1,644147	2,909086
1-2	0,001142	0,0069	0,013708	0,057116
1-3	0,114095	0,3949	0,816219	1,307706
1-4	0	0,0131	0,032738	0,10476
1-5	0,078609	0,226	0,427434	0,633782
1-6	0,00376	0,0263	0,052645	0,135374
1-7	0,061839	0,1649	0,329809	0,559498
1-8	0,009427	0,0354	0,075417	0,143763
1-9	0,046155	0,0923	0,126926	0,130772
1-10	0,004789	0,0287	0,084597	0,132482

Tabelul 3.30. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1\dots 9$

Modul de vibrație $m-n$	ε [%]			
	Defect 5,3×24,8 mm	Defect 5,8×48,8mm	Defect 6,05×75,2mm	Defect 4,9×101,6mm
2-1	0,015465	0,0876	0,309294	0,762926
2-2	0,014369	0,0335	0,057477	0,071846
2-3	0,012811	0,0854	0,324537	0,845503
2-4	0,03693	0,0776	0,118177	0,162494
2-5	0,009407	0,0847	0,348061	0,956383
2-6	0,034332	0,0766	0,11884	0,203349
2-7	0,011113	0,0845	0,371177	1,091305
2-8	0,026288	0,062	0,097642	0,281658
2-9	0,03033	0,067	0,209115	0,333626

Tabelul 3.31. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1\dots 7$

Modul de vibrație $m-n$	ε [%]			
	Defect 5,3×24,8 mm	Defect 5,8×48,8mm	Defect 6,05×75,2mm	Defect 4,9×101,6mm
3-1	0,295472	1,0728	2,331834	4,192509
3-2	0,00256	0,0102	0,023036	0,076787
3-3	0,228327	0,7379	1,369962	1,970822
3-4	0,008847	0,0332	0,064138	0,214531
3-5	0,166263	0,5328	1,007592	1,396206
3-6	0,012556	0,0502	0,100447	0,312102
3-7	0,111623	0,3476	0,66336	0,856309

Tabelul 3.32. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1\dots 4$

Modul de vibrație $m-n$	ε [%]			
	Defect 5,3×24,8 mm	Defect 5,8×48,8mm	Defect 6,05×75,2mm	Defect 4,9×101,6mm
4-1	0,045338	0,3012	1,39251	5,524701
4-2	0,004741	0,0126	0,023704	0,050568
4-3	0,041013	0,2491	0,890131	1,936719
4-4	0,024482	0,0389	0,080645	0,192972

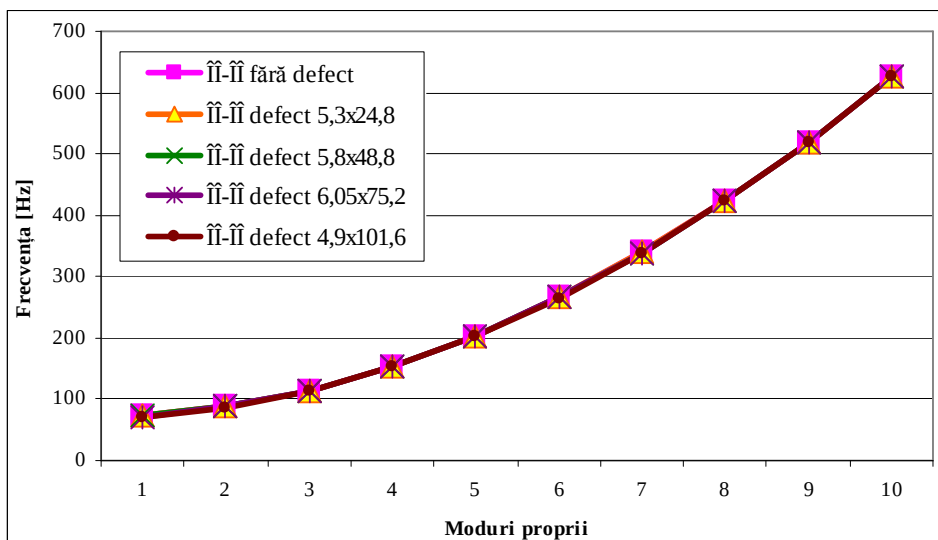


Fig. 3.53. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

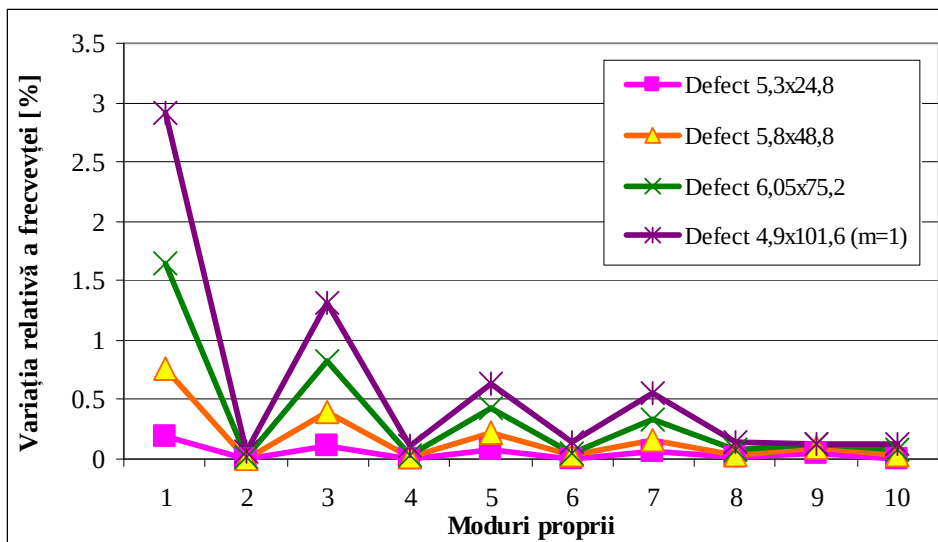


Fig. 3.54. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

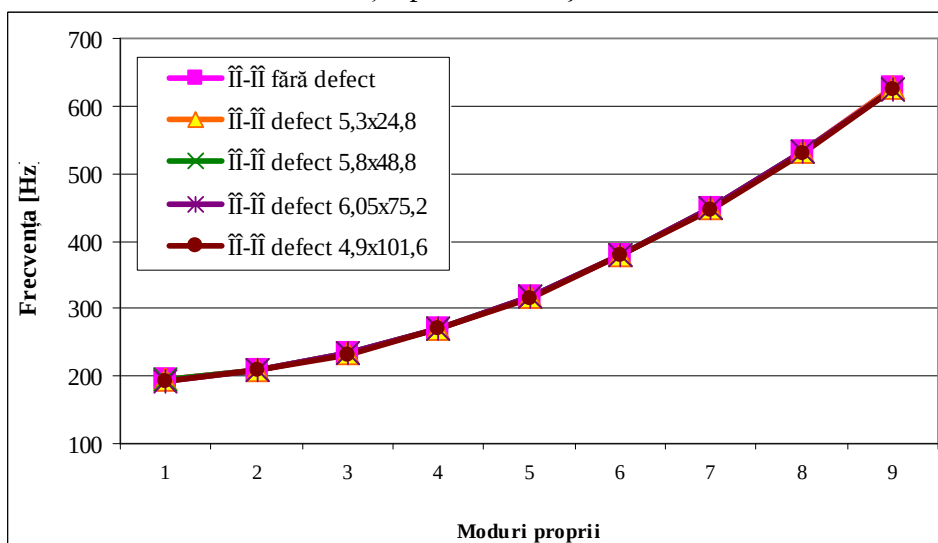


Fig. 3.55. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

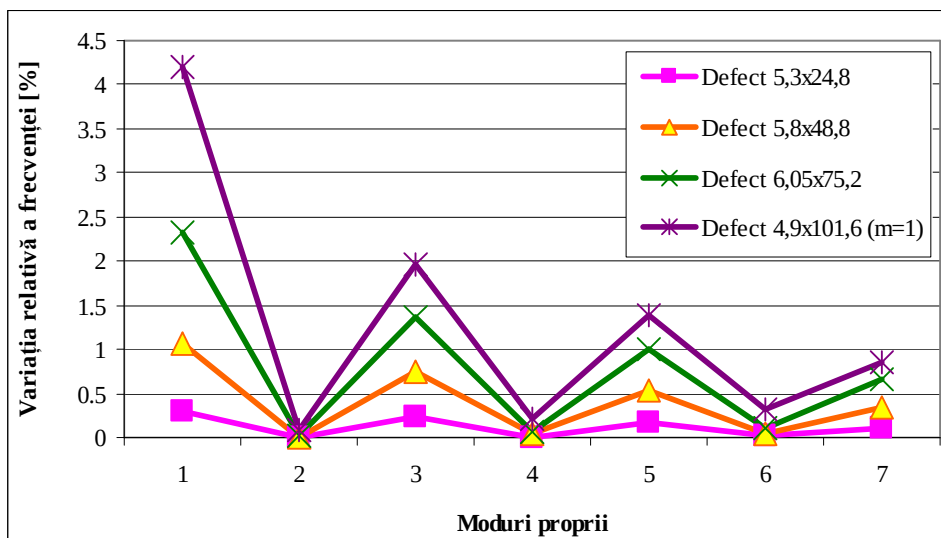


Fig. 3.56. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

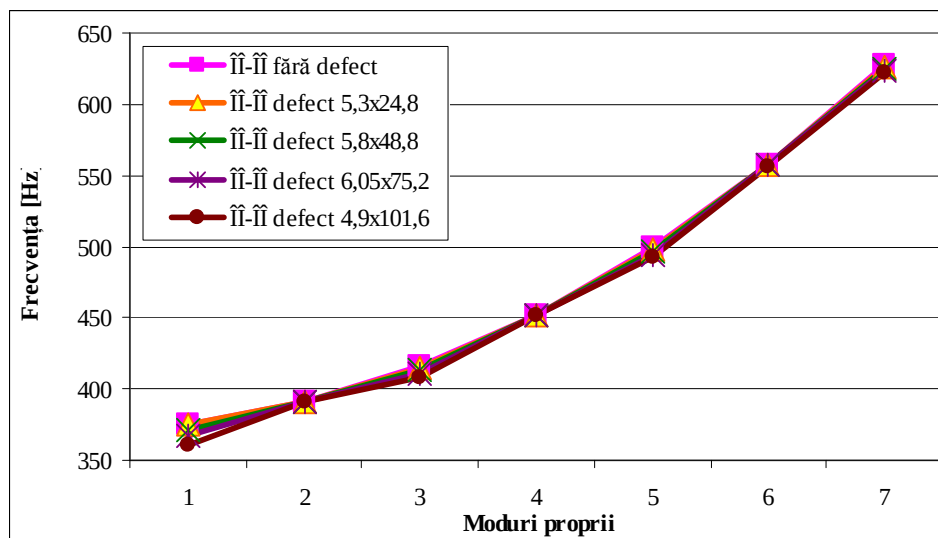


Fig. 3.57. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

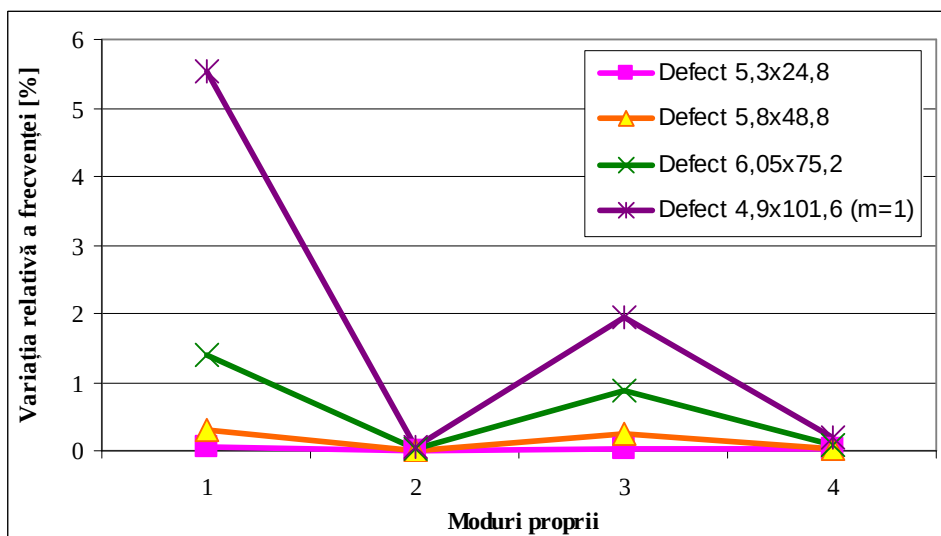


Fig. 3.58. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

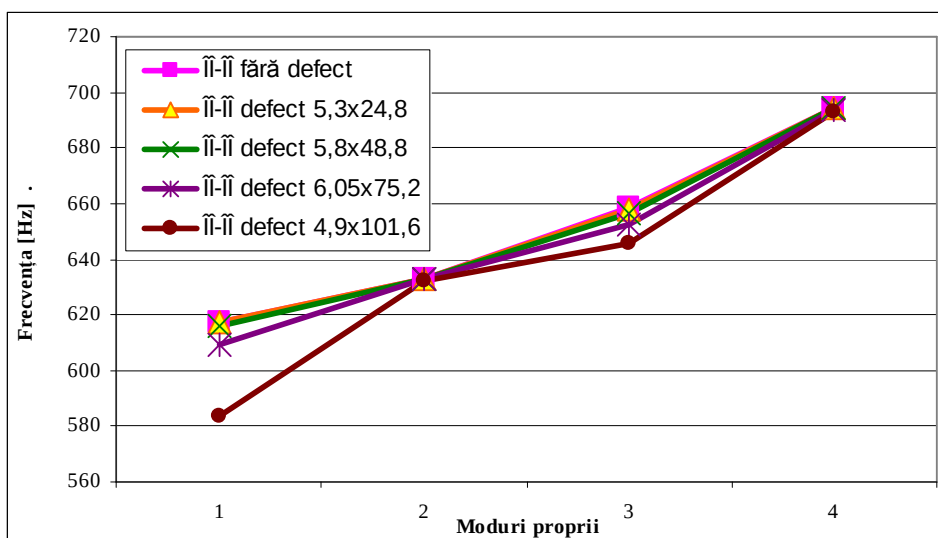


Fig. 3.59. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

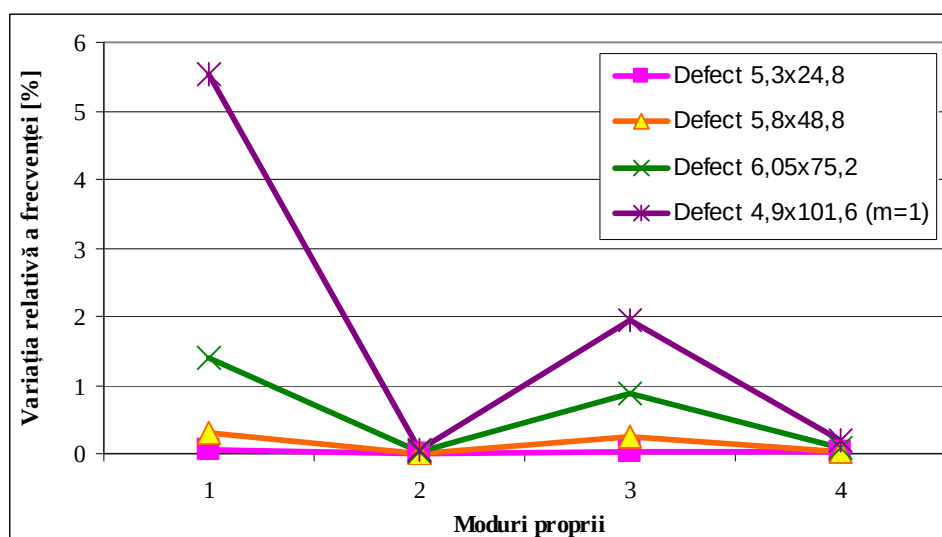
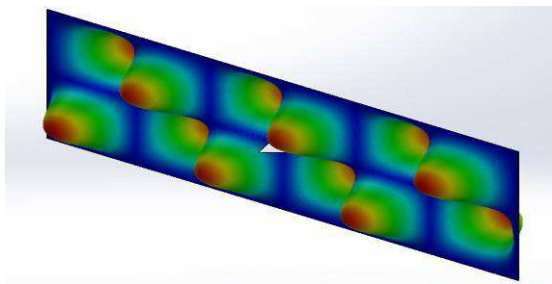


Fig. 3.60. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

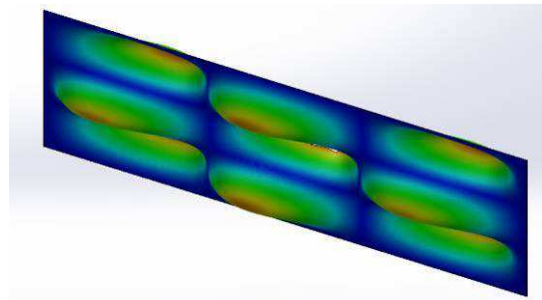
Din rezultatele prezentate în figurile 3.54, 3.56, 3.58 și 3.60 și tabelele 3.29-3.32 se observă că eroarea maximă este de 5,52 % pentru modul $m=4$ și $n=1$ în cazul plăcii cu defectul de $4,9\times 101,6$ mm. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la placa cu defectul de $4,9\times 101,6$ mm.

3.3.2 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile încastrate pe toate laturile cu defect central transversal

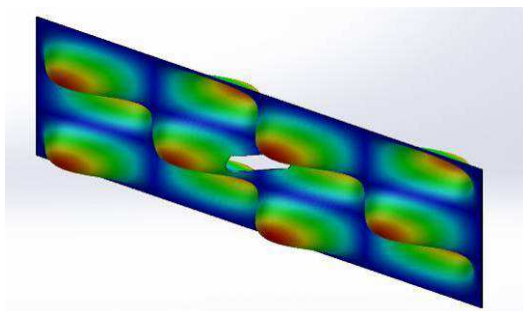
În fig. 3.61 se prezintă șaispezece moduri de vibrație obținute prin simulare cu element finit pentru o placă cu defect central transversal încastrată pe contur [39,110,111].



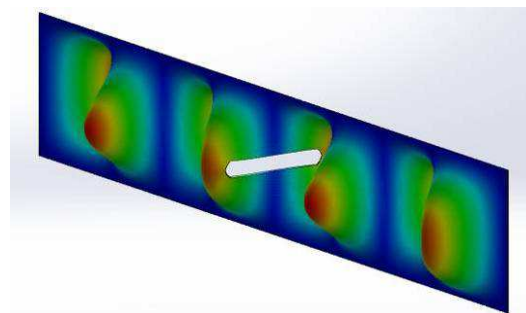
Mod 2-6



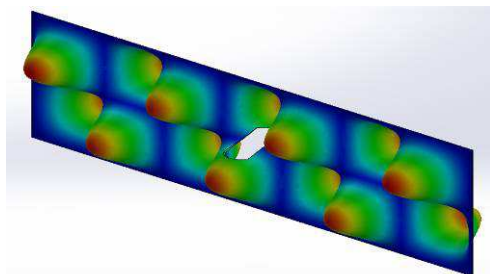
Mod 3-3



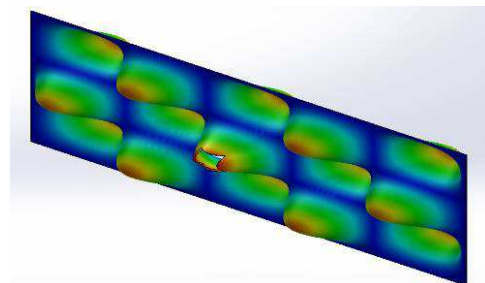
Mod 3-4



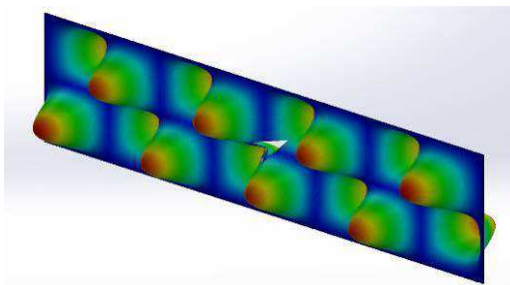
Mod 1-8



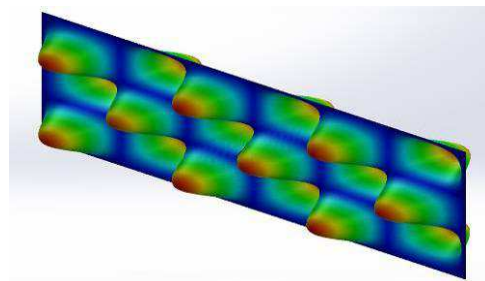
Mod 2-7



Mod 3-5

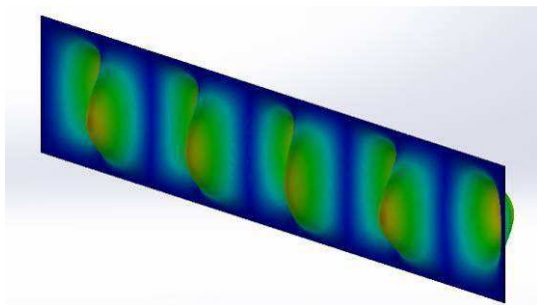


Mod 2-8

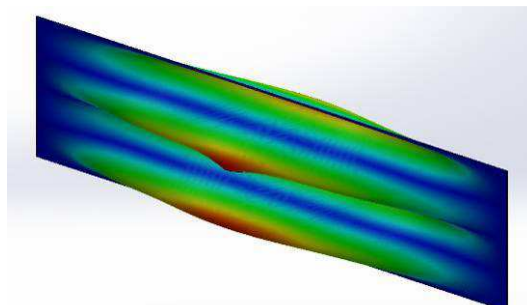


Mod 3-6

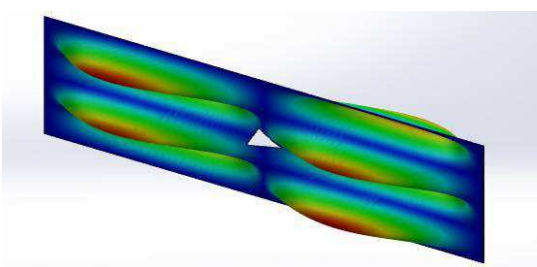
Fig. 3.61. Exemple de moduri de vibrație pentru placa cu defect central 50x50 mm



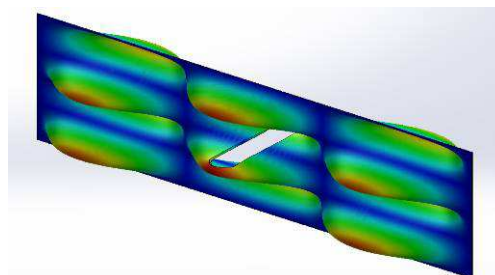
Mod 2-9



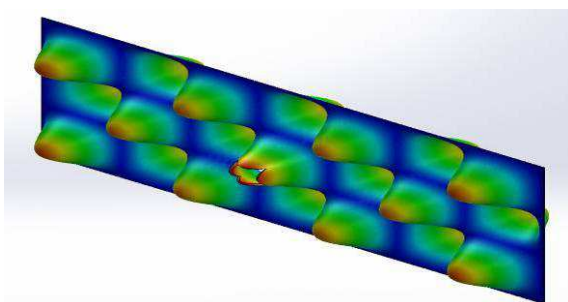
Mod 4-1



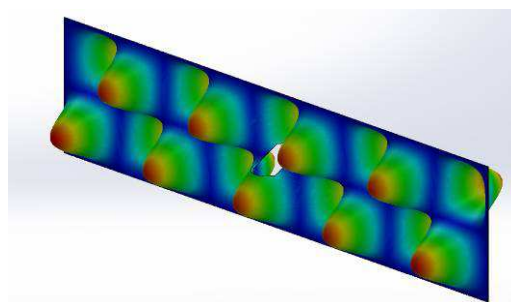
Mod 4-2



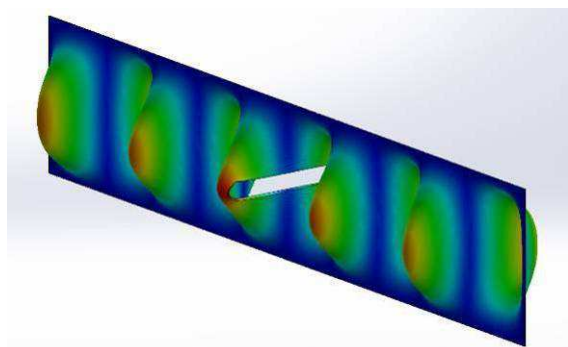
Mod 4-3



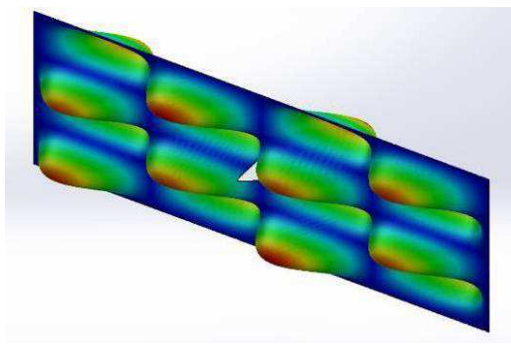
Mod 3-7



Mod 2-9



Mod 1-10



Mod 4-4

Fig. 3.61. Exemple de moduri de vibrație pentru placa cu defect central 50x50 mm (continuare)

În urma simulării numerice s-au obținut frecvențele proprii pentru o placă reală încastrată pe contur, în funcție de modurile proprii de vibrație cu defect central transversal având dimensiunile: 5×25 mm; 5×50 mm; 5×75 mm; 5×101 mm. Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 3.33 - 3.36, iar valorile abaterii procentuale calculate cu formula (3.1) sunt prezentate în tabelele 3.37 - 3.40, pentru fiecare caz analizat.

Tabelul 3.33. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație $m-n$	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5×25 mm	Defect 5×50 mm	Defect 5×75 mm	Defect 5×100 mm
1-1	73,047	73,028	73,004	72,898	72,785
1-2	87,541	87,539	87,515	87,495	87,386
1-3	113,94	113,77	113,71	112,65	111,81
1-4	152,73	152,72	152,61	152,46	151,9
1-5	203,54	203,04	202,45	200,05	197,88
1-6	265,93	265,92	265,65	265,01	263,14
1-7	339,59	338,65	336,86	333,12	329,27
1-8	424,31	424,25	423,96	421,74	415,84
1-9	519,99	518,58	516,86	511,71	508,26
1-10	626,5	626,45	626,18	625,96	625

Tabelul 3.34. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1...4$

Modul de vibrație $m-n$	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5×25 mm	Defect 5×50 mm	Defect 5×75 mm	Defect 5×100 mm
4-1	617,59	617,58	617,35	617,27	616,76
4-2	632,81	632,8	632,76	632,73	632,71
4-3	658,33	658,31	658,25	657,92	657,43
4-4	694,4	694,26	694,19	694,13	693,87

Tabelul 3.35. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1\dots 9$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5×25 mm	Defect 5×50 mm	Defect 5×75 mm	Defect 5×100 mm
2-1	193,99	193,98	193,96	193,94	193,89
2-2	208,78	208,75	208,73	208,72	208,67
2-3	234,18	234,17	234,15	234,1	233,95
2-4	270,78	270,69	270,6	270,55	270,43
2-5	318,91	318,79	318,82	318,75	318,4
2-6	378,66	378,52	378,32	378,29	378,06
2-7	449,92	449,91	449,75	449,6	448,95
2-8	532,56	532,41	532,29	532,1	531,68
2-9	626,45	626,38	623,76	620,89	607,81

Tabelul 3.36. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1\dots 7$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5×25 mm	Defect 5×50 mm	Defect 5×75 mm	Defect 5×100 mm
3-1	375,67	375,47	375,27	375,14	375
3-2	390,69	390,7	390,61	390,5	389,87
3-3	416,07	415,82	415,54	415,18	414,91
3-4	452,15	452,14	451,86	451,31	449,93
3-5	499,21	498,76	497,76	496,05	493,63
3-6	557,51	557,47	556,46	554,89	548,22
3-7	627,11	626,44	625,34	623,66	622,56

Tabelul 3.37. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	ε [%]			
	Defect 5×25 mm	Defect 5×50 mm	Defect 5×75 mm	Defect 5×100 mm
1-1	0,026011	0,058866	0,203978	0,358673
1-2	0,002285	0,0297	0,052547	0,17706
1-3	0,149201	0,201861	1,132175	1,869405
1-4	0,006548	0,07857	0,176783	0,543443
1-5	0,245652	0,535521	1,714651	2,78078
1-6	0,00376	0,105291	0,345956	1,049148
1-7	0,276804	0,803911	1,905239	3,038959
1-8	0,014141	0,082487	0,605689	1,996182
1-9	0,271159	0,601935	1,592338	2,255813
1-10	0,007981	0,051077	0,086193	0,239425

Tabelul 3.38. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1...9$

Modul de vibrație m-n	ε [%]			
	Defect 5×25 mm	Defect 5×50 mm	Defect 5×75 mm	Defect 5×100 mm
2-1	0,005155	0,015465	0,025775	0,051549
2-2	0,014369	0,023949	0,028738	0,052687
2-3	0,00427	0,012811	0,034162	0,098215
2-4	0,033237	0,066475	0,08494	0,129256
2-5	0,037628	0,028221	0,050171	0,15992
2-6	0,036972	0,08979	0,097713	0,158453
2-7	0,002223	0,037784	0,071124	0,215594
2-8	0,028166	0,050699	0,086375	0,16524
2-9	0,011174	0,429404	0,887541	2,975497

Tabelul 3.39. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1\dots7$

Modul de vibrație m-n	ε [%]			
	Defect 5x25 mm	Defect 5x50 mm	Defect 5x75 mm	Defect 5x100 mm
3-1	0,295472	1,07275	2,331834	4,192509
3-2	0,00256	0,010238	0,023036	0,076787
3-3	0,228327	0,737857	1,369962	1,970822
3-4	0,008847	0,033175	0,064138	0,214531
3-5	0,166263	0,532842	1,007592	1,396206
3-6	0,012556	0,050223	0,100447	0,312102
3-7	0,111623	0,347626	0,66336	0,856309

Tabelul 3.40. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1\dots4$

Modul de vibrație m-n	ε [%]			
	Defect 5x25 mm	Defect 5x50 mm	Defect 5x75 mm	Defect 5x100 mm
4-1	0,045338	0,301171	1,39251	5,524701
4-2	0,004741	0,012642	0,023704	0,050568
4-3	0,041013	0,249115	0,890131	1,936719
4-4	0,024482	0,038882	0,080645	0,192972

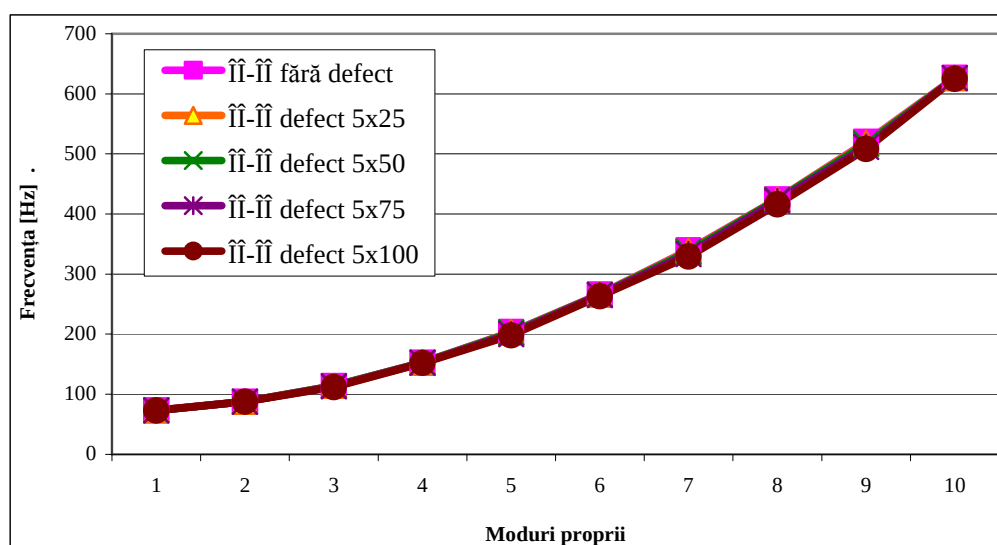


Fig.3.62. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\dots10$

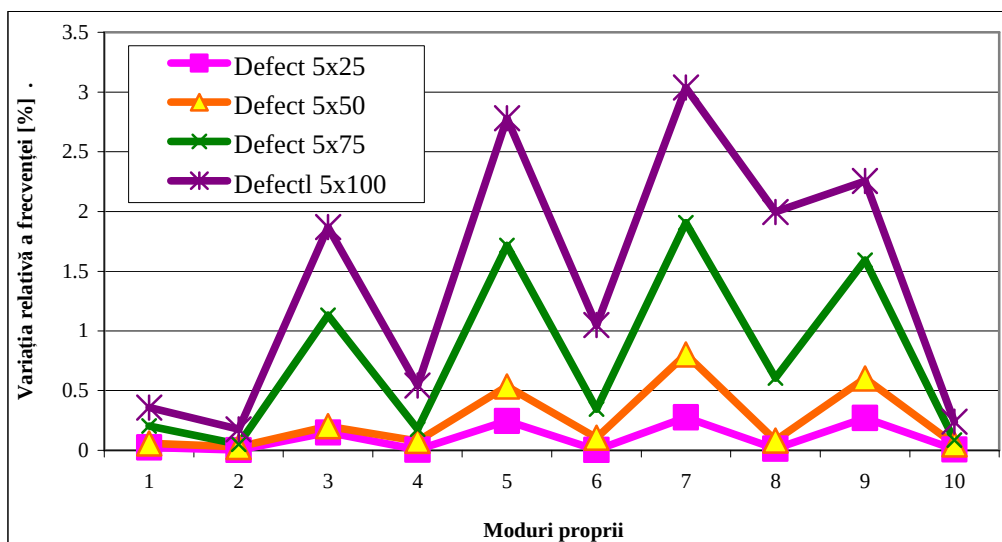


Fig. 3.63. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

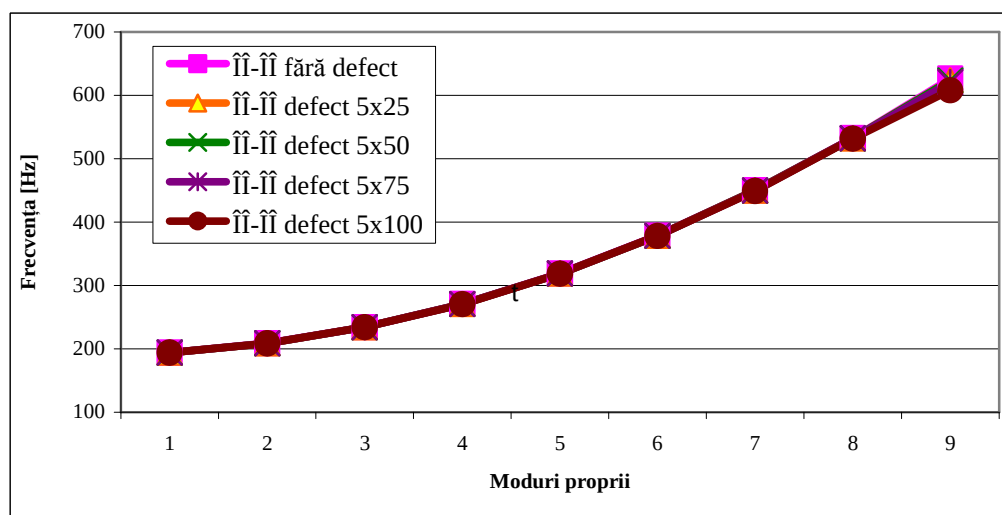


Fig. 3.64. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

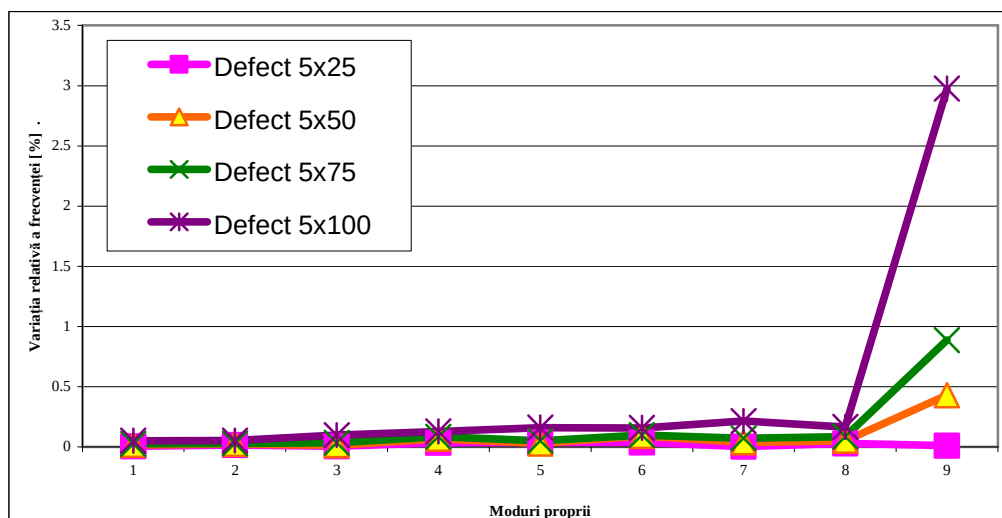


Fig. 3.65. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

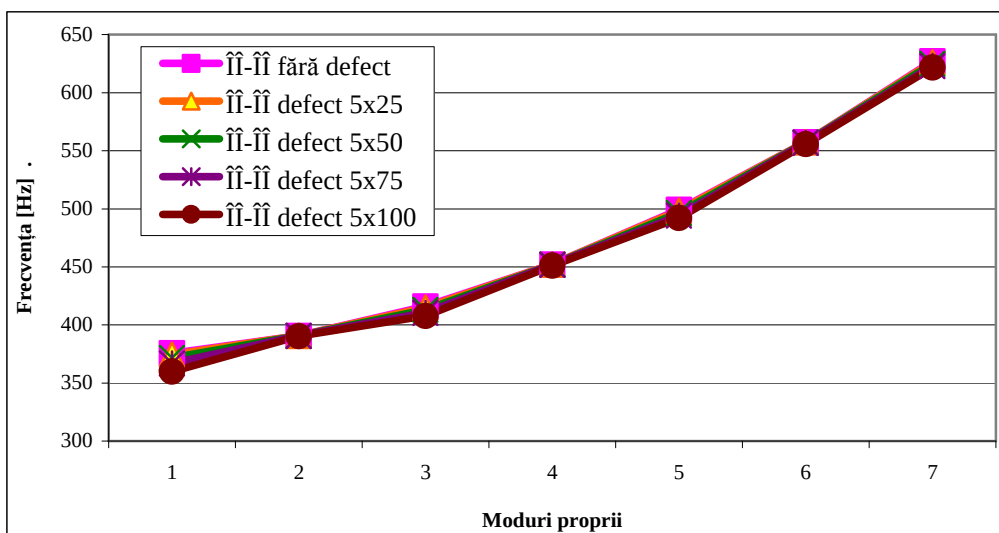


Fig. 3.66. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

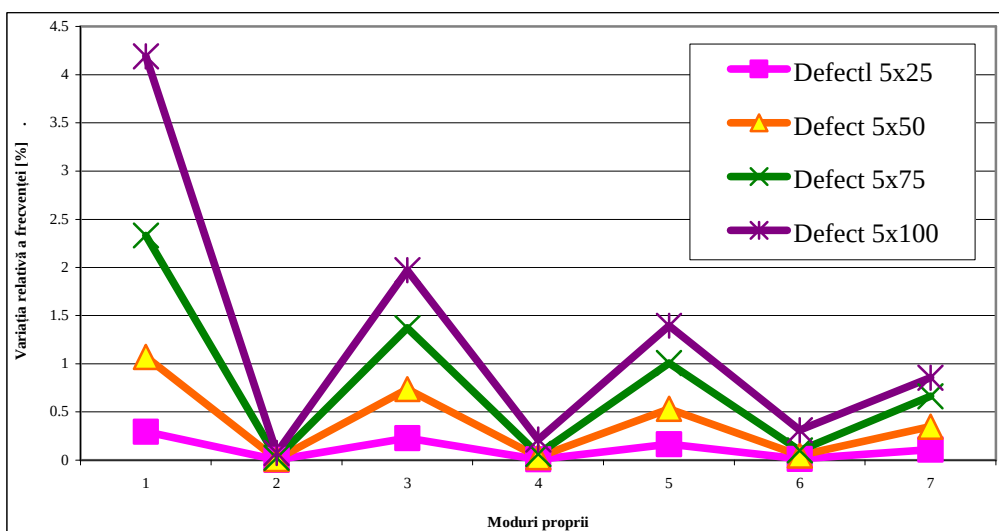


Fig. 3.67. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

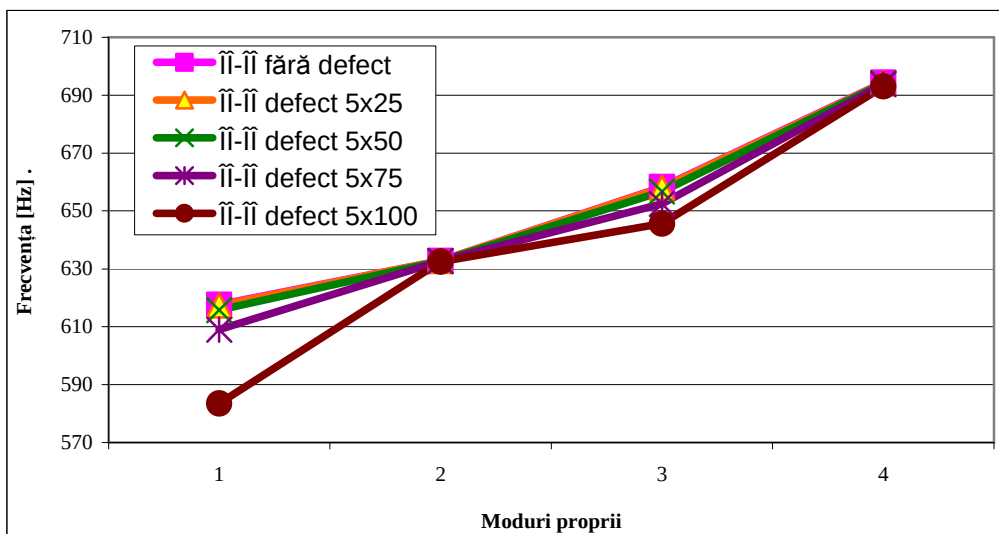


Fig. 3.68. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

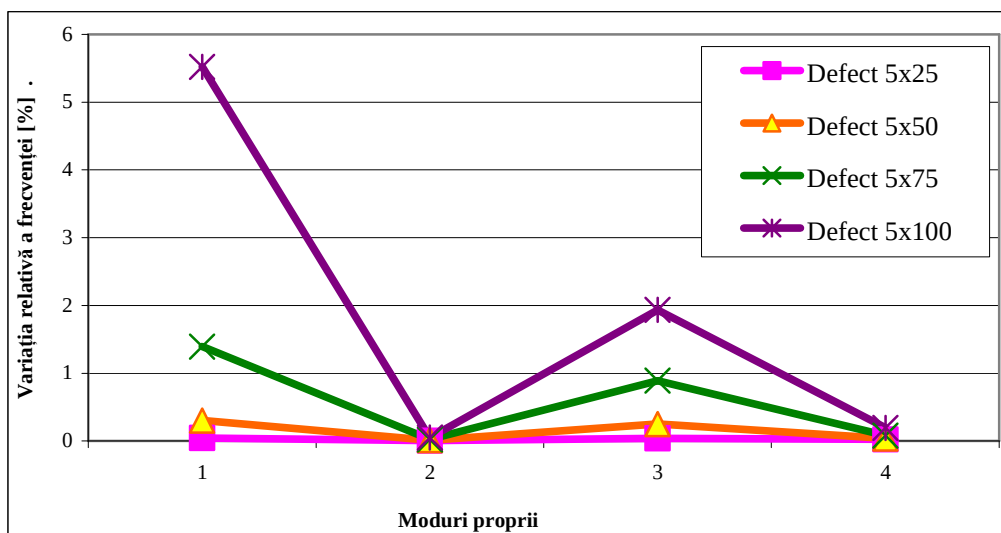


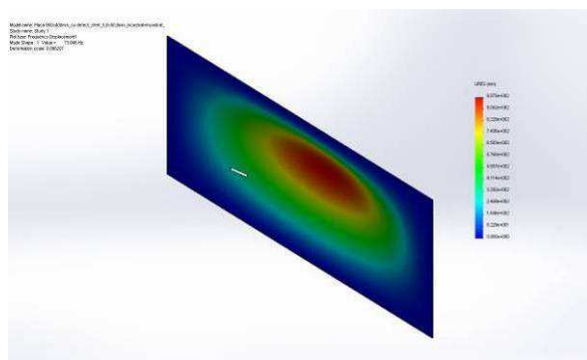
Fig. 3.69. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 3.63, 3.65, 3.67, 3.69 și tabelele 3.37-3.40 se observă că eroarea maximă este de 5,52 % pentru modul $m=4$ și $n=1$ în cazul plăcii cu defectul de 5×00 mm. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la placa cu defectul de 5×100 mm.

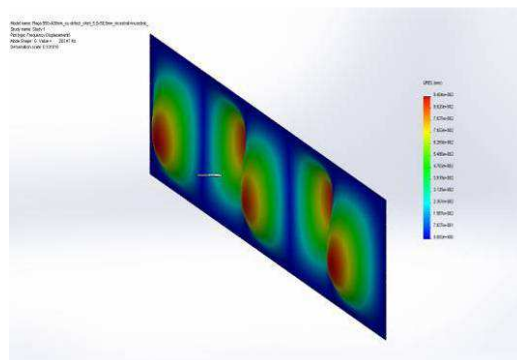
3.3.3 Analiza rezultatelor obținute pentru plăcile încastrate pe toate laturile cu defect lateral

În fig. 3.70 se prezintă zece moduri de vibrație obținute prin simulare cu element finit pentru o placă cu defect lateral longitudinal încastrată pe contur [53].

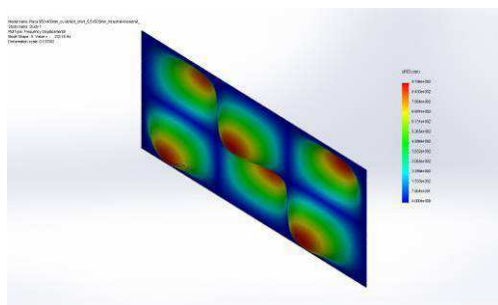
În urma simulării numerice s-au obținut frecvențele proprii pentru o placă reală încastrată pe contur, în funcție de modurile proprii de vibrație cu defect lateral longitudinal având dimensiunile: $5,1\times 25,2$ mm; $5,5\times 50,5$ mm; $5,8\times 77,5$ mm; $4,8\times 100$ mm. Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 3.41-3.44, iar valorile abaterii procentuale calculate cu formula (3.1) sunt prezentate în tabelele 3.45-3.48, pentru fiecare caz analizat.



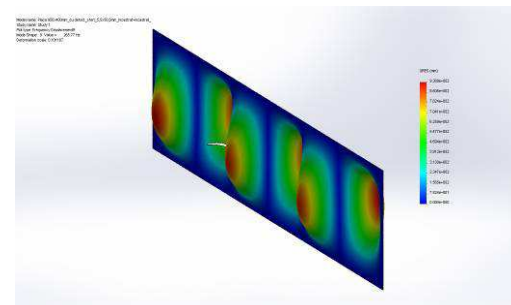
Mod 2-6



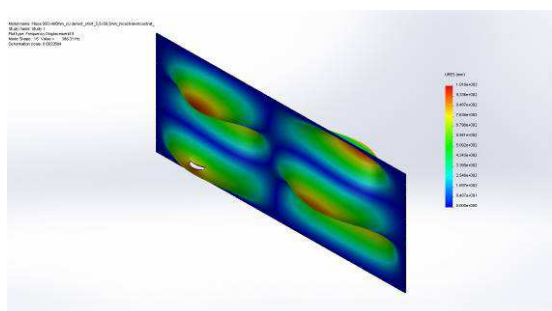
Mod 3-3



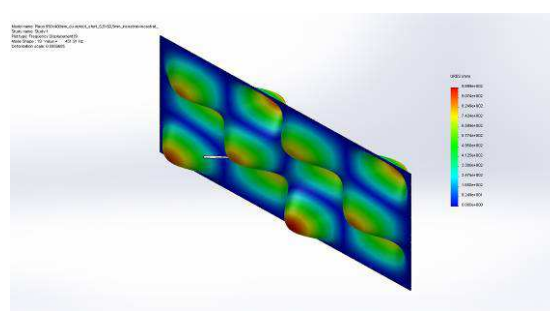
Mod 3-4



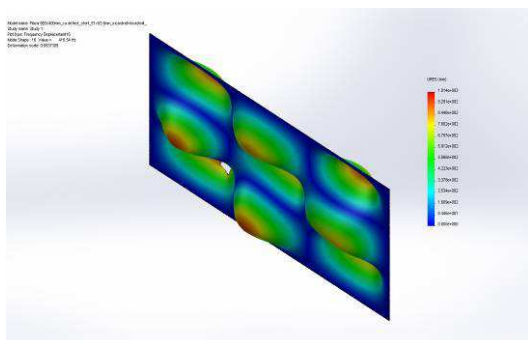
Mod 1-8



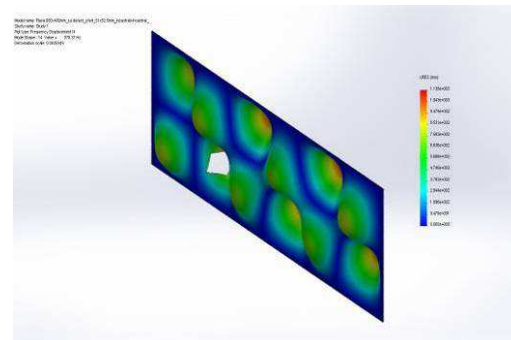
Mod 2-7



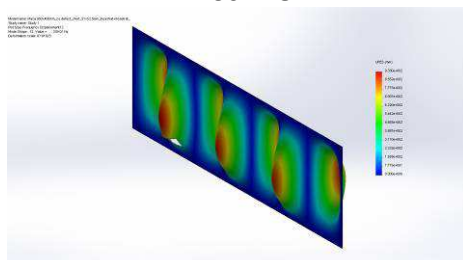
Mod 3-5



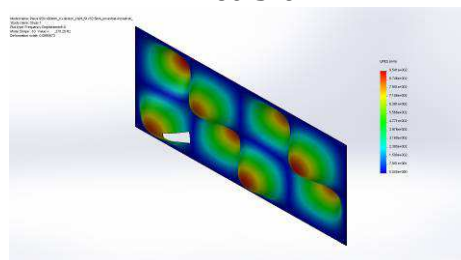
Mod 2-8



Mod 3-6



Mod 2-9



Mod 4-1

Fig. 3.70. Exemple de moduri de vibrație pentru placa cu defect central 50x50 mm

Tabelul 3.41. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5,1×25,2 mm	Defect 5,5×50,5 mm	Defect 5,8×77,5 mm	Defect 4,8×100 mm
1-1	73,047	73,04	73,036	73,013	72,985
1-2	87,541	87,537	87,519	87,354	87,253
1-3	113,94	113,92	113,89	113,67	113,53
1-4	152,73	152,71	152,67	152,58	152,51
1-5	203,54	203,52	203,47	203,41	203,32
1-6	265,93	265,88	265,77	265,44	265,33
1-7	339,59	339,5	339,33	338,99	338,58
1-8	424,31	424,25	424,15	423,89	423,64
1-9	519,99	519,96	519,89	519,73	519,61
1-10	626,5	626,45	626,41	626,02	625,8

Tabelul 3.42. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1...4$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5,1×25,2 mm	Defect 5,5×50,5 mm	Defect 5,8×77,5 mm	Defect 4,8×100 mm
4-1	617,59	617,54	616,79	613,64	611,2
4-2	632,81	632,64	631,62	629,97	627,95
4-3	658,33	658,19	657,27	655,86	651,41
4-4	694,4	694,27	694,02	693,74	692,18

Tabelul 3.43. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1...7$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5,1×25,2 mm	Defect 5,5×50,5 mm	Defect 5,8×77,5 mm	Defect 4,8×100 mm
3-1	375,67	375,33	373,92	371,27	365,89
3-2	390,69	389,99	388,31	386,67	384,46
3-3	416,07	415,55	414,36	413,65	411,56
3-4	452,15	452,08	451,91	451,49	451,19
3-5	499,21	499,12	498,84	498,04	497,48
3-6	557,51	557,06	555,92	553,35	551,2
3-7	627,11	626,45	625,11	625,02	624,96

Tabelul 3.44. Valorile frecvențelor proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1\dots 9$

Modul de vibrație m-n	Frecvența [Hz]				
	Fără defect	Defect 5,1×25,2 mm	Defect 5,5×50,5 mm	Defect 5,8×77,5 mm	Defect 4,8×100 mm
2-1	193,99	193,85	193,38	192,53	191,09
2-2	208,78	208,43	207,47	206,23	204,58
2-3	234,18	233,89	233,16	232,65	231,23
2-4	270,78	270,73	270,57	270,32	270,03
2-5	318,91	318,89	318,78	318,44	318,22
2-6	378,66	378,41	377,97	377,51	377,43
2-7	449,92	449,56	448,89	448,13	447,74
2-8	532,56	532,41	532,09	531,69	531,23
2-9	626,45	626,32	626,23	625,42	621,32

Tabelul 3.45. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=1$ și $n=1\dots 10$

Modul de vibrație m-n	ε [%]			
	Defect 5,1×25,2 mm	Defect 5,5×50,5 mm	Defect 5,8×77,5 mm	Defect 4,8×100 mm
1-1	0,009583	0,015059	0,046545	0,084877
1-2	0,004569	0,025131	0,213614	0,328989
1-3	0,017553	0,043883	0,236967	0,359839
1-4	0,013095	0,039285	0,098213	0,144045
1-5	0,009826	0,034391	0,06387	0,108087
1-6	0,018802	0,060166	0,184259	0,225623
1-7	0,026503	0,076563	0,176684	0,297417
1-8	0,014141	0,037708	0,098984	0,157903
1-9	0,005769	0,019231	0,050001	0,073078
1-10	0,007981	0,014366	0,076616	0,111732

Tabelul 3.46. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=2$ și $n=1\dots 9$

Modul de vibrație m-n	ε [%]			
	Defect 5,1×25,2 mm	Defect 5,5×50,5 mm	Defect 5,8×77,5 mm	Defect 4,8×100 mm
2-1	0,072169	0,314449	0,752616	1,494922
2-2	0,167641	0,627455	1,221381	2,011687
2-3	0,123836	0,435562	0,653344	1,259715
2-4	0,018465	0,077554	0,16988	0,276978
2-5	0,006271	0,040764	0,147377	0,216362
2-6	0,066022	0,182222	0,303703	0,32483
2-7	0,080014	0,22893	0,397849	0,484531
2-8	0,028166	0,088253	0,163362	0,249737
2-9	0,020752	0,035119	0,164419	0,8189

Tabelul 3.47. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=3$ și $n=1\dots 7$

Modul de vibrație m-n	ε [%]			
	Defect 5,1×25,2 mm	Defect 5,5×50,5 mm	Defect 5,8×77,5 mm	Defect 4,8×100 mm
3-1	0,090505	0,465834	1,171241	2,603349
3-2	0,17917	0,609179	1,028949	1,594615
3-3	0,124979	0,410989	0,581633	1,083952
3-4	0,015482	0,05308	0,145969	0,212319
3-5	0,018028	0,074117	0,23437	0,346548
3-6	0,080716	0,285197	0,746175	1,131818
3-7	0,105245	0,318923	0,333275	0,342843

Tabelul 3.48. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect central $m=4$ și $n=1\dots 4$

Modul de vibrație m-n	ε [%]			
	Defect 5,1×25,2 mm	Defect 5,5×50,5 mm	Defect 5,8×77,5 mm	Defect 4,8×100 mm
4-1	0,008096	0,129536	0,639583	1,034667
4-2	0,026864	0,18805	0,448792	0,768003
4-3	0,021266	0,161013	0,375192	1,051145
4-4	0,018721	0,054724	0,095046	0,3197

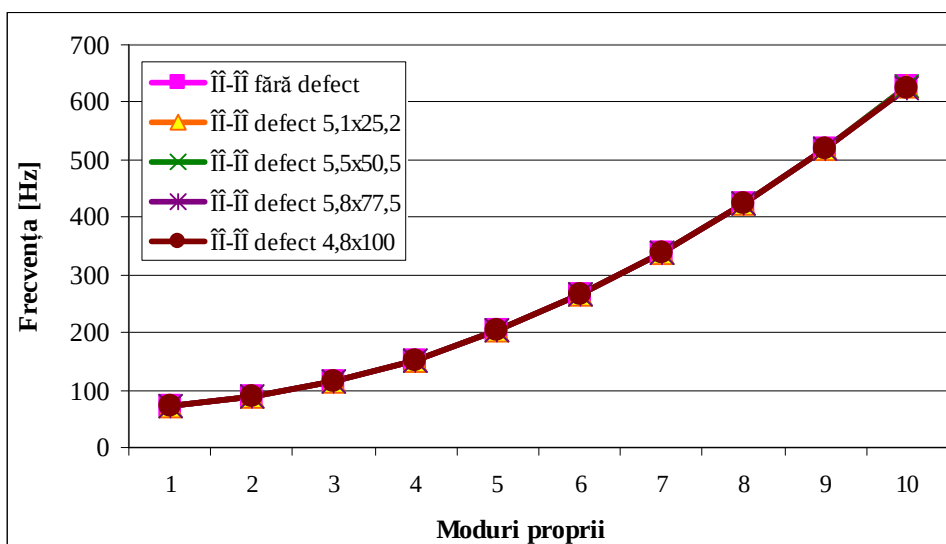


Fig. 3.71. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

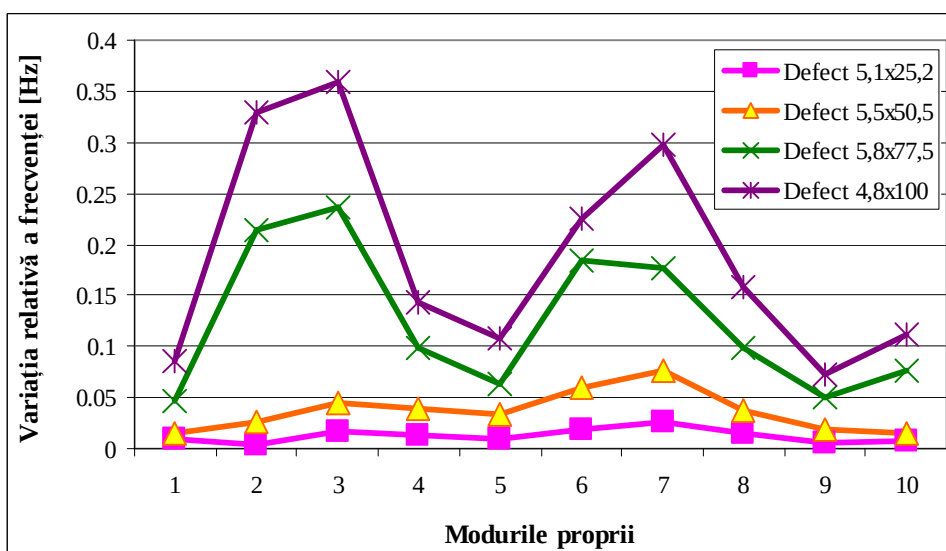


Fig. 3.72. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

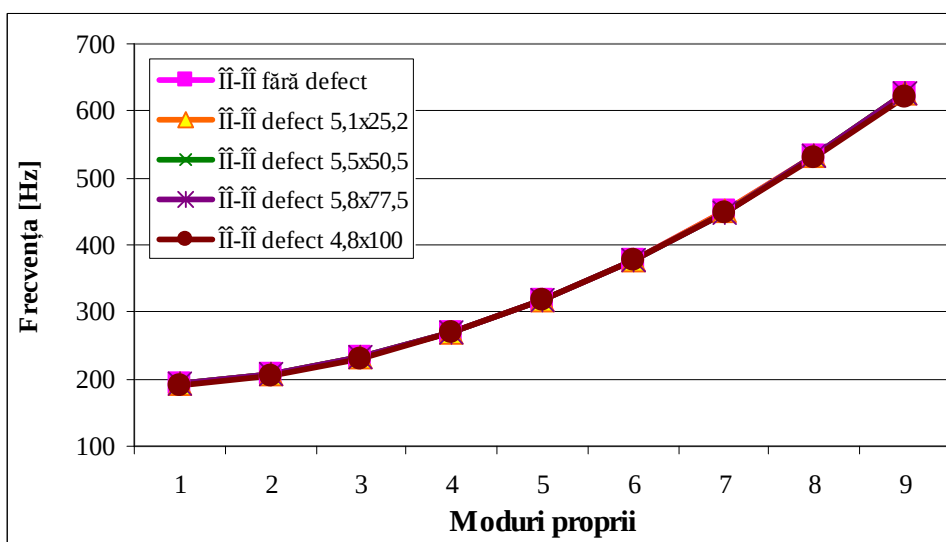


Fig. 3.73. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

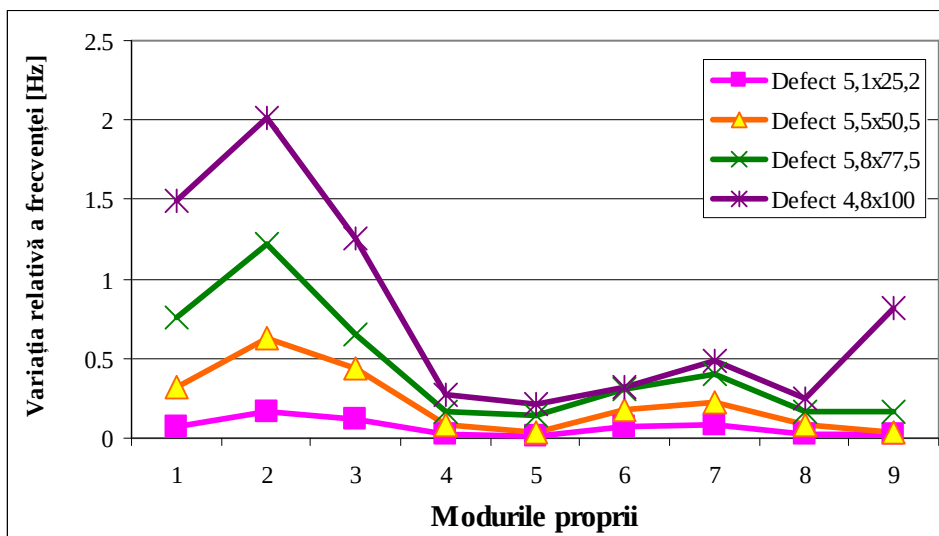


Fig. 3.74. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

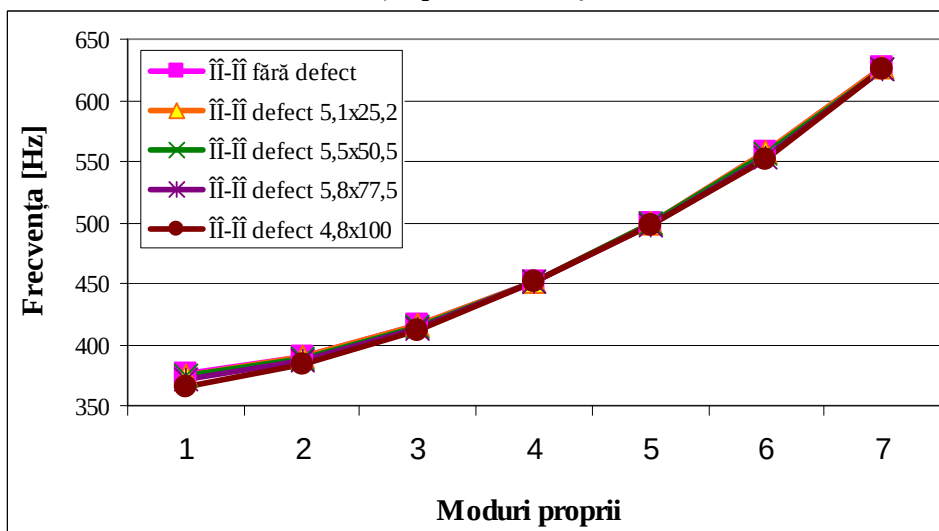


Fig. 3.75. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

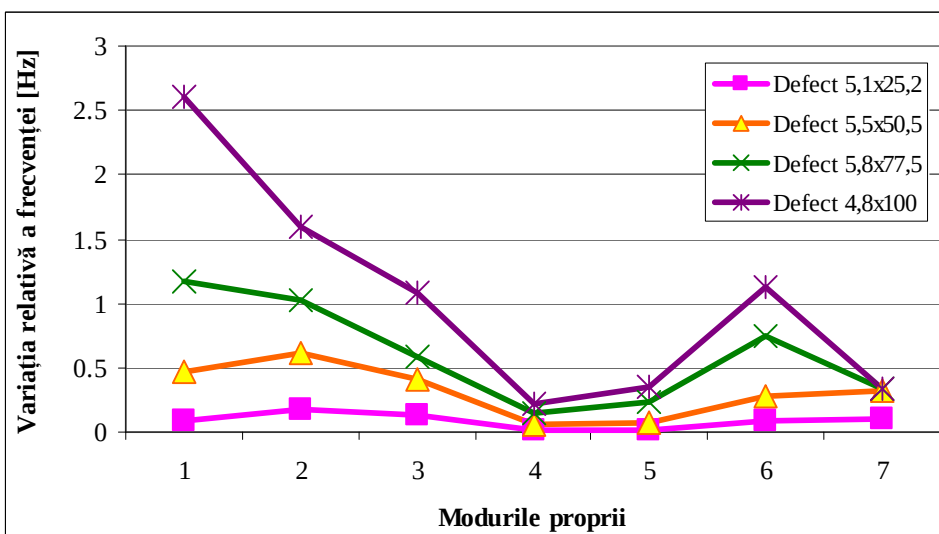


Fig. 3.76. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

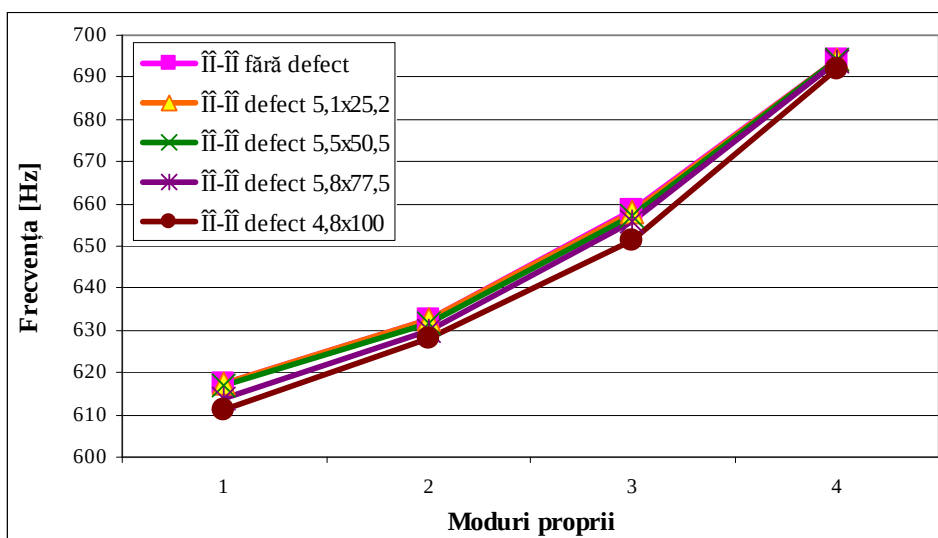


Fig. 3.77. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

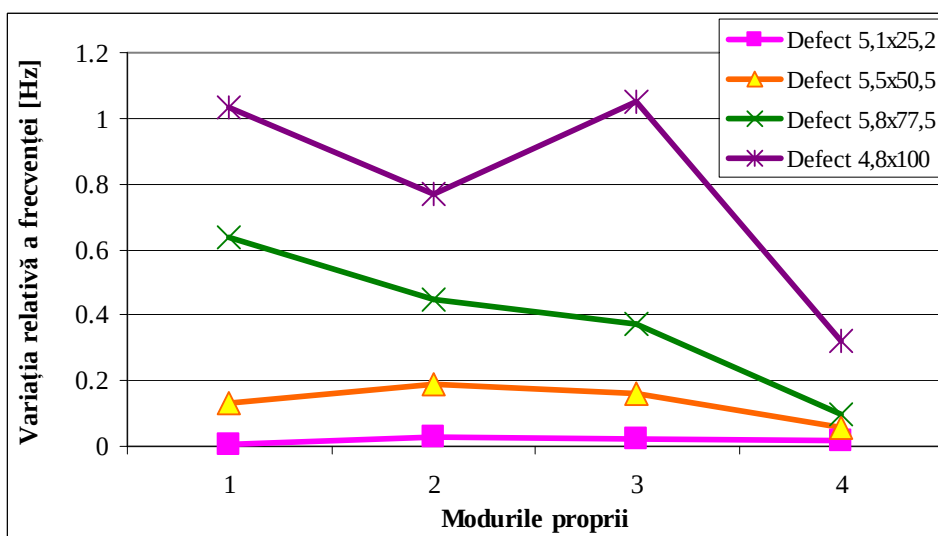


Fig. 3.78. Variația relativă a frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 3.72, 3.74, 3.76 și 3.78 și tabelele 3.37-3.40. se observă că eroarea maximă este de 2,6 % pentru modul $m=3$ și $n=1$ în cazul plăcii cu defectul de 4,8x100 mm. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la placa cu defectul de 4,8x100 mm.

3.4 Concluzii

În acest capitol au fost efectuate cercetări pe plăci elastice subțiri fără defecte, de formă dreptunghiulară cu dimensiunile: 980×430 mm pentru placa simplu rezemată pe contur, 980×450 mm pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lățime) și liberă pe celelalte două laturi (lungime), 950×430 mm pentru placa simplu rezemată pe două laturi paralele (lungime) și încastrată pe celelalte două laturi (lățime), 950×450 mm pentru placa încastrată pe două laturi paralele (lățime) și liberă pe celelalte două laturi (lungime), 950×450 mm pentru placa încastrată pe contur, cu grosime constantă $h = 2$ mm, și pe plăci elastice subțiri cu defecte încastrate pe contur cu diferite geometrii și poziții ale defectului, prin metoda elementului finit.

Pentru a obține rezultate credibile, a fost efectuată o analiză a influenței mărimilor medii ale elementelor utilizate în modelare și alese pentru diverse aplicații care conduc la rezultate suficient de precise.

Rezultatele obținute pentru placa fără defect pentru diferite condiții de rezemare au fost comparate cu cele obținute în capitolul anterior prin metoda analitică. Analiza cu elemente finite efectuate pe plăci subțiri fără defecte a evidențiat valabilitatea relației $Z(x,y) = Z_i \times Z_j$ propusă în capitolul 2.

Aceeași analiză efectuată pe plăci încastrate pe contur cu defecte, într-o largă varietate de dimensiuni, poziții și orientare pe placă, au evidențiat faptul că fiecare defect are o „semnătură” proprie evidențiable prin modificarea relativă a frecvențelor pentru un număr rezonabil de moduri de vibrație m și n .

În cazurile defectelor de dimensiuni reduse, aceste „semnături” sunt foarte apropiate de cele obținute în cazul barelor la dimensiuni mai mari ale defectelor, adică la modificarea laturilor defectului. În sensul creșterii acestora se introduc perturbații în „semnătură” datorită modificării esențiale de masă și a distribuirii formelor modale.

Spre deosebire de cazul barelor, reducerea cantității de energie înmagazinată poate avea loc și în zonele unde deplasarea verticală este nulă, deoarece aici poate apărea fenomenul de răsucire a zonei afectate, conform figurilor 3.13 și 3.14.

CAP 4. ANALIZA EXPERIMENTALĂ A COMPORTAMENTULUI DINAMIC AL PLĂCILOR SUBȚIRI

Plecând de la rezultatele obținute prin metoda analitică și metoda FEM, se impune necesitatea verificării frecvențelor obținute prin validarea experimentală a datelor.

După cum s-a constatat în capitolele anterioare, există „mici” diferențe între cele două metode numerice de calcul, fapt care poate fi verificat prin încercări reale.

4.1 Încercări inițiale pentru determinarea săgeților statice în cazul plăcilor subțiri

Pentru început, au fost efectuate încercări preliminare pentru determinarea săgeților statice de încărcare [30], în cazul unei plăci dreptunghiulare, în situația simplu rezemat pe două laturi paralele și liberă pe celelalte două laturi (SR – LL), ca în figura 4.1.

Cu ajutorul unui șubler, cu afișaj electronic, au fost determinate săgețile statice la mijlocul plăcii și, în diferite puncte de pe axa longitudinală a plăcii, în cazul SR – LL, sub acțiunea masei proprii, ca în figura 4.2.

Masa plăcii s-a calculat cu relația $m=\rho \cdot V$, deoarece placa este omogenă. Valoarea masei calculate este $m=6,71$ Kg. S-a atașat, la mijlocul plăcii, un taler cu masa $m=0,59$ Kg și mase marcate având valorile $m=1$ Kg, $m=2$ Kg, respectiv $m=3$ Kg.



Fig. 4.1 Standul experimental pentru determinarea săgeților

Tabelul 4.1. Valorile săgeților în funcție de masă

Săgeata \ Masa	Masa proprie (6,71 kg)	Masa proprie + taler (7,3 kg)	Masa proprie + taler+m= 1 kg (8,3 kg)	Masa proprie + taler + m= 2 kg (9,3kg)	Masa proprie + taler+m= 3 kg (10,3 kg)
Y_1 [mm]	6,09	6,92	8,40	10,04	11,36
Y_2 [mm]	9,31	10,76	13,72	16,78	18,95
Y_3 [mm]	9,5	11,28	14,64	18,27	21,04
Y_4 [mm]	9,29	10,70	13,44	16,42	19,06
Y_5 [mm]	5,92	6,57	8,01	9,70	11,27

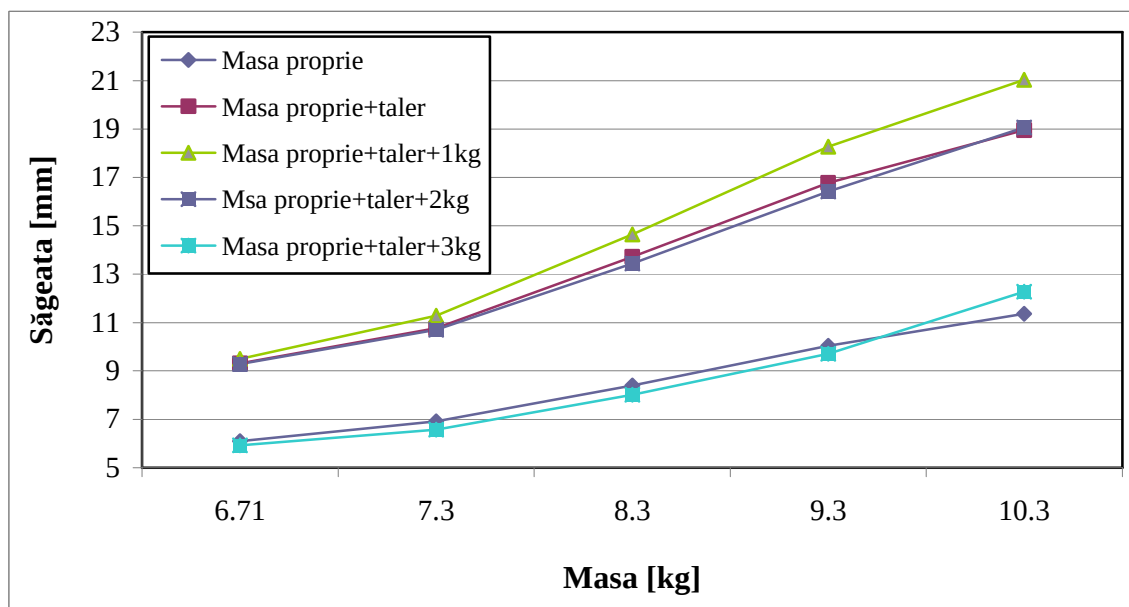


Fig. 4.2. Variația săgeților în funcție de masă

Valorile săgeților de încărcare măsurate în funcție de masele atașate sunt trecute în tabelul 4.1 și reprezentate grafic în figura 4.2. Din figură se observă că săgețile de încărcare în funcție de masele atașate cresc aproximativ liniar.

4.2 PREZENTAREA STANDULUI EXPERIMENTAL – încercări dinamice

Pentru a valida rezultatele obținute prin calcul analitic și numeric, prezentate în capitolele 2 și 3, încercările experimentale au fost efectuate utilizând eșantioane din tablă de grosime 2 mm, cu lungimea de 1 m și lățimea de 0,45 m, care datorită sistemului de fixare au fost aduse la dimensiunile efective egale cu cele ale modelelor studiate anterior.

Aparatura utilizată pentru încercări este formată dintr-un accelerometru triaxial, o placă de achiziție și un laptop cu software de analiză, care sunt descrise în continuare.

a) Accelerometru triaxial, tip 4506-B-003

Accelerometrul este folosit pentru măsurarea vibrațiilor pe trei direcții simultan. Accelerometrul are sensibilitate înaltă, impedanță la ieșire mică, semnal înalt la rația de zgomot și lățimea benzii largă. Accelerometrele triaxiale pot fi utilizate în cazul măsurătorilor multicanal, la măsurători modale, precum și la măsurători de analiză structurală. Masa accelerometrului este de 18 grame și are o influență care poate fi neglijabilă în procesul de măsurare a frecvențelor proprii pentru placa considerată. Accelerometrul folosit la încercare este prezentat în figura 4.3 și este produs de firma Bruel Kjaer.



Fig. 4.3. Accelerometru triaxial tip 4506-B-003

Caracteristicile tehnice ale accelerometrului triaxial utilizat sunt următoarele:

- model 4506-B-003, triaxial – Teds;
- sensibilitate: $51(500) \text{ mV/ms}^2$ (mV/g);
- rata de măsurare: $(\pm)14 \text{ g}$;
- șocul maxim: $(\pm) 2000 \text{ g}$;
- rata de temperatură operațională: -54 la $+100 \text{ }^\circ\text{C}$;
- rata de frecvență pe axa O_x este: $0,3\text{-}4000 \text{ Hz}$;
- rata de frecvență pe axa O_y și O_z este: $0,3\text{-}2000 \text{ Hz}$;
- nivelul de zgomot rezidual măsurat în rata de frecvență specifică: $0,12 \text{ mg}$.

b) Placa de achiziție NI 9233

Achiziția semnalelor de la accelerometrul triaxial a fost efectuată cu o placă de achiziție cu 4 canale, tip NI 9233, prezentat în figura 4.4.a, montată într-un Rack de tip Hy-Speed USB Carrier, care este prezentat în figura 4.4.b.



a



b

Fig. 4.4. Placa de achiziție NI9233 a și Hy Speed USB Carrier b

Caracteristicile generale ale plăcii NI 9233, produsă de National Instruments, sunt următoarele:

- 4 intrări analogice
- Plaja de amplitudine a semnalului de intrare $\pm 5V$
- Precizie de eșantionare 24 bit
- Rata maximă de eșantionare 51,2 kS/s
- Comunicare serială pe USB

c) Laptop PC – cu software LabVIEW

Stocarea semnalelor de la accelerometrul triaxial și placa de achiziție a fost realizată cu ajutorul unui laptop HP Compaq 8710w și a unui modul de achiziție realizat cu programul LabVIEW 2011. Semnalele salvate au fost analizate ulterior utilizând, de asemenea, software LabVIEW [10,21,93,94,102,103].

Pentru fiecare situație în parte: SR-SR, SR-II, SR – LL, II – LL, II – II, a fost realizat un montaj al plăcii din tablă de oțel cu dimensiunile $L = 1 \text{ m}$, $l = 0,45 \text{ m}$ și grosimea $h = 2 \text{ mm}$. Pentru montaj s-au utilizat elemente din cornier metalic rigid și țevă rectangulară, care au fost sudate de o masă metalică fixată pe o fundație de beton. Pentru producerea unei excitații în placa testată, cu diverse legături exterioare (pe contur) față de elementele rigide, s-a procedat la lovirea (ciocnirea) acestei plăci cu ajutorul mâinii operatorului.

Încercările au fost efectuate în cadrul Institutului de Cercetări pentru Echipamente și Tehnologii în Construcții (ICECON S.A), București, cu aparatura necesară din cadrul Laboratorului de Acustică și Vibrații.

În cazul încastrării pe două laturi sau a încastrării pe toate laturile (vezi figura 4.5), placa metalică a fost prinsă rigid cu ajutorul unei bride metalice perforate și cu strângere controlată, utilizând mai multe prinderi rigide „șurub-piuliță”. În final, în cazul acestor multiple fixări „șurub-piuliță” pe contur, se consideră a fi o legătură tip „încastrare”, ca în figura 4.5.

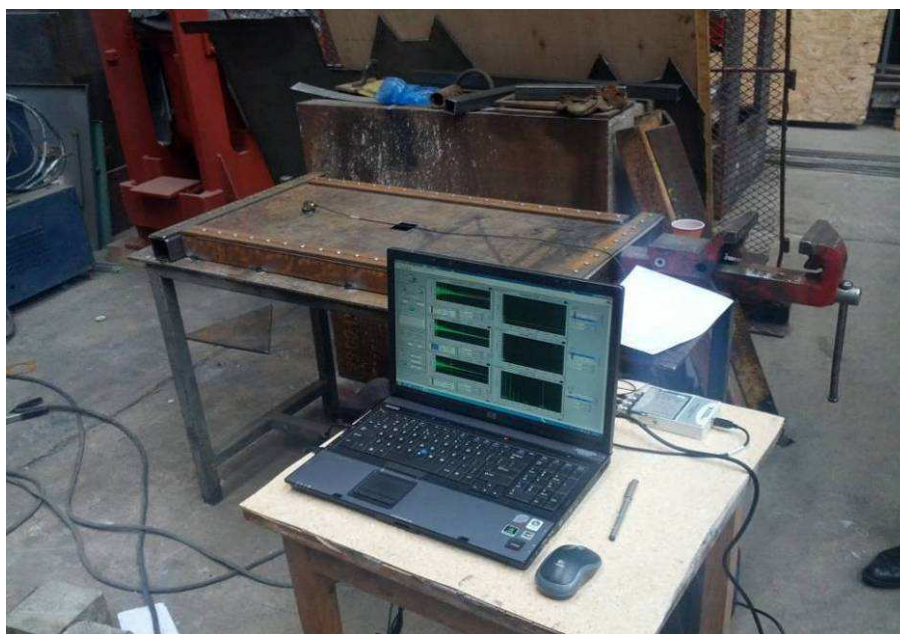


Fig. 4.5. Stand experimental, în situația plăcii încastrate pe toate laturile

Ulterior, au fost analizate semnalele prelevate de 1-3 s, în situațiile considerate utilizând programul LabVIEW, prin selectarea unui eșantion (5.000 respectiv 25.000) din semnalul măsurat în care să se observe intervalul de atenuare a frecvenței. Pentru vizualizarea „pick-urilor” (vârfurilor) din spectrul de semnal al variației accelerației în timp, a fost efectuată o transformare Fourier pentru a putea evidenția spectrul de variație al accelerației în funcție de frecvență. În intervalul 0 – 650 Hz, au fost notate valorile frecvențelor întâlnite în spectru.

Panoul frontal [21,102,103] din figura 4.6 conține butoane de comandă operaționale pentru prelucrarea semnalului de accelerație, înregistrat anterior cu ajutorul un traductor piezoelectric de accelerație (accelerometru triaxial). Aceste butoane permit utilizatorului selectarea și citirea semnalului de accelerație, precum și afișarea caracteristicilor esențiale: rata de eșantionare, numărul de eșantioane înregistrate.

Prin intermediul acestei interfețe virtuale se poate evidenția grafic variația accelerației în timp și selectarea unui anumit interval de timp (un anumit număr de eşantioane) pentru evidențierea și analizarea unui anumit eveniment (șoc, lovitură, atenuare etc.) din întreg semnalul înregistrat. Utilizând module digitale de calcul care au implementate operațiile de derivare și integrare numerică, se pot evidenția variațiile de viteză sau deplasare. Pentru eliminarea oricăror semnale parazite (broom) sau pentru evidențierea unor semnale de joasă/înaltă frecvență se poate utiliza opțional un modul de filtrare numerică a semnalului, utilizând diverse tipuri de filtre cu trecere sus/jos, cum sunt filtrele: Bessel, Butterworth, Chebyshev și Eliptic.

În partea stângă a panoului frontal, cele trei grafice evidențiază spectrul în timp al semnalului de accelerație analizat (forma vibrației), corespunzător celor 3 direcții înregistrate: OX, OY și OZ. Prin intermediul unui modul virtual FFT, prin care se aplică o transformată Fourier semnalului numeric, în partea dreaptă a panoului frontal se evidențiază spectrul în frecvență a semnalului analizat. Cu ajutorul unor „cursoare” se poate indica și citi cu exactitate valorile vârfurilor întâlnite în spectru de frecvențe, de unde se obțin simultan valorile amplitudinilor și a frecvențelor corespunzătoare.

În final, după analizarea spectrului în frecvență a semnalelor înregistrate experimental și „culegerea” datelor referitoare la amplitudinea și valorile frecvențelor corespunzătoare ale vârfurilor întâlnite în semnal, a fost posibilă efectuarea unei analize comparative față de valorile obținute prin metoda analitică și cu metoda FEM.

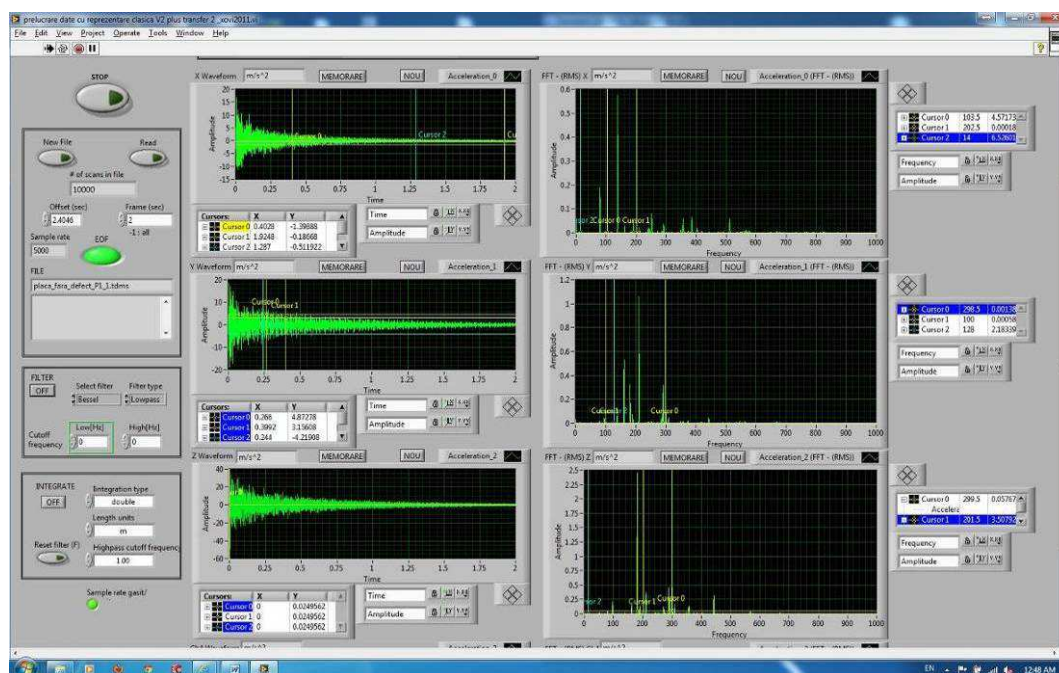


Fig. 4.6. Panoul frontal

4.3 Rezultate experimentale în cazul plăcilor fără defect

Măsurătorile de frecvențe proprii au fost efectuate pe table subțiri dreptunghiulare din oțel, având dimensiunile $L=1\text{ m}$, $l=0,45\text{ m}$ și $h=2\text{ mm}$. Pentru fiecare experiment s-au făcut cel puțin 10 citiri de frecvențe proprii în punctul P_1 , respectiv P_2 . Pentru fiecare citire au fost extrase primele 30 de frecvențe proprii ale plăcii, iar valorile au fost trecute într-un tabel. Frecvențele proprii s-au citit cu ajutorul accelerometrului descris în paragraful 4.2. Valorile frecvențelor proprii măsurate au fost comparate cu frecvențele proprii obținute pe cale analitică și prin metoda elementului finit.

4.3.1 Rezultatele experimentale în cazul plăcilor încastrate pe două laturi și liber pe celelalte două laturi (ÎÎ - LL)

În acest caz, pentru montaj s-au utilizat elemente din corniere metalice rigide și țeavă rectangulară care au fost sudate de o masă metalică fixată pe o fundație de beton. Placa metalică a fost prinsă rigid cu ajutorul unei bride metalice perforate și cu strângere controlată, utilizând mai multe prinderi rigide „șurub-piuliță”. În final, în cazul acestor multiple fixări „șurub-piuliță” pe contur, se consideră a fi o legătură tip „încastrare”, ca în figura 4.7. Încadrarea s-a realizat pe două laturi paralele (lățimea plăcii), iar celelalte două laturi (lungimea plăcii) sunt libere. Dimensiunile plăcii după realizarea montajului experimental sunt: $L=0,95\text{ m}$, $l=0,45\text{ m}$, $h=0,002\text{ m}$.



Fig. 4.7. Standul experimental pentru placa ÎÎ-LL

Pentru acest experiment s-au făcut 10 citiri de frecvențe proprii în punctul P_1 , la mijlocul plăcii și în punctul P_2 situat pe axa longitudinală la $1/6$ din lungimea plăcii. Pentru fiecare citire au fost extrase primele 30 frecvențe proprii ale plăci, iar valorile lor medii au fost trecute în tabelele 4.2 – 4.5. Pentru fiecare mod de vibrație s-a făcut media aritmetică

pentru valorile citite și această valoare a fost comparată cu valoarea obținută din calculul analitic, respectiv din analiza modală numerică. Măsurătorile s-au făcut cu ajutorul accelerometrului triaxial descris.

Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 4.2 – 4.5, iar valorile abaterii procentuale calculate cu formula (3.1) sunt prezentate în tabelele 4.6-4.9, pentru fiecare caz analizat.

Tabelul 4.2. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=1$ și $n=1\ldots 10$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	Experimental [Hz]
1-1	12,4818	11,985	12,33
1-2	34,375	33,055	33,46
1-3	66,4693	64,877	65,56
1-4	108,218	107,56	107,43
1-5	161,654	160,88	163,21
1-6	225,594	224,91	226,02
1-7	301,984	299,64	302,43
1-8	392,803	385,07	383,18
1-9	470,041	463,65	470,26
1-10	534,694	533,09	535,13

Tabelul 4.3. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=2$ și $n=1\ldots 9$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	Experimental [Hz]
2-1	27,7741	26,28	27,15
2-2	48,6673	46,015	47,56
2-3	82,7617	80,231	81,76
2-4	126,511	124,13	125,63
2-5	180,947	178,21	179,11
2-6	247,887	242,68	246,06
2-7	301,277	299,66	300,75
2-8	354,095	351,89	352,28
2-9	468,333	465,67	467,36

Tabelul 4.4. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=3$ și $n=1\dots7$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	Experimental [Hz]
3-1	64,92806	64,107	64,35
3-2	91,821261	90,23	90,96
3-3	132,98771	130,22	131,46
3-4	176,91562	175,6	176,13
3-5	236,10061	234,45	235,11
3-6	321,66471	313,06	317,13
3-7	387,4304	377,74	381,65

Tabelul 4.5. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=4$ și $n=1\dots4$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	Experimental [Hz]
4-1	160,943574	158,31	159,35
4-2	189,83678	183,43	186,56
4-3	224,93114	221,72	222,46
4-4	276,68022	270,99	273,13

Tabelul 4.6. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=1$ și $n=1\dots10$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM	Experimental
1-1	1,230803	2,798054
1-2	2,734486	1,2104
1-3	1,387004	1,041794
1-4	0,733883	0,121009
1-5	0,953183	1,427609
1-6	0,188328	0,491107
1-7	0,147439	0,922528
1-8	2,5113	0,493241
1-9	0,046549	1,405605
1-10	0,081438	0,381216

Tabelul 4.7. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=2$ și $n=1\dots9$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM	Experimental
2-1	2,247131	3,20442
2-2	2,328263	3,248528
2-3	1,225147	1,870108
2-4	0,701083	1,193982
2-5	1,025448	0,502485
2-6	0,742384	1,373649
2-7	0,175062	0,362427
2-8	0,515272	0,110707
2-9	0,208276	0,361606

Tabelul 4.8. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=3$ și $n=1\dots7$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM	Experimental
3-1	0,890308	0,377622
3-2	0,946857	0,802551
3-3	1,16211	0,943253
3-4	0,446046	0,300914
3-5	0,421339	0,28072
3-6	1,429921	1,283385
3-7	1,514581	1,024499

Tabelul 4.9. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=4$ și $n=1\dots4$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM	Experimental
4-1	0,990145	0,652651
4-2	1,756422	1,677744
4-3	1,110824	0,332644
4-4	1,299828	0,78351

În figurile 4.8 – 4.11 se prezintă variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru cazurile analizate, iar în figurile 4.12 – 4.15 se prezintă abaterea procentuală a frecvenței față de frecvența determinată analitic, în funcție de modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

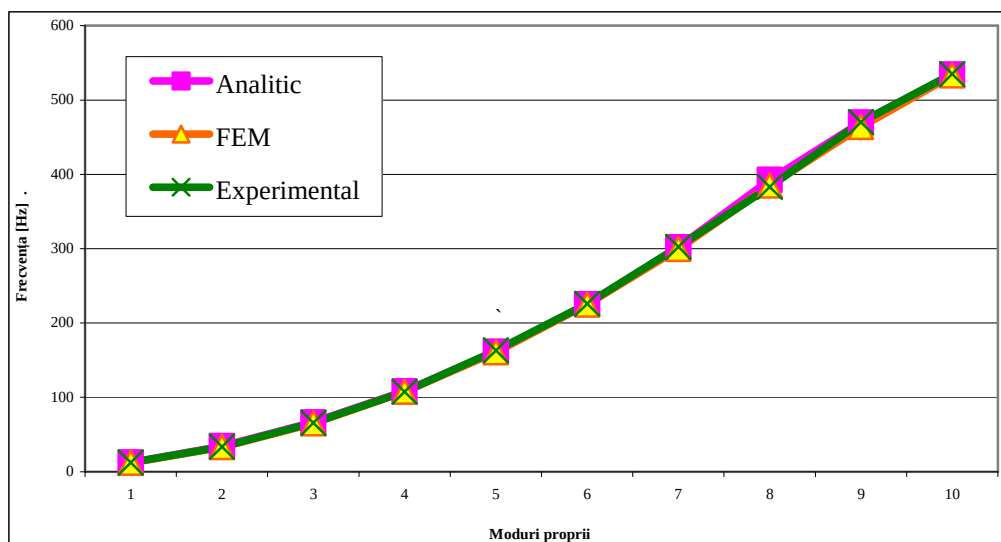


Fig. 4.8. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

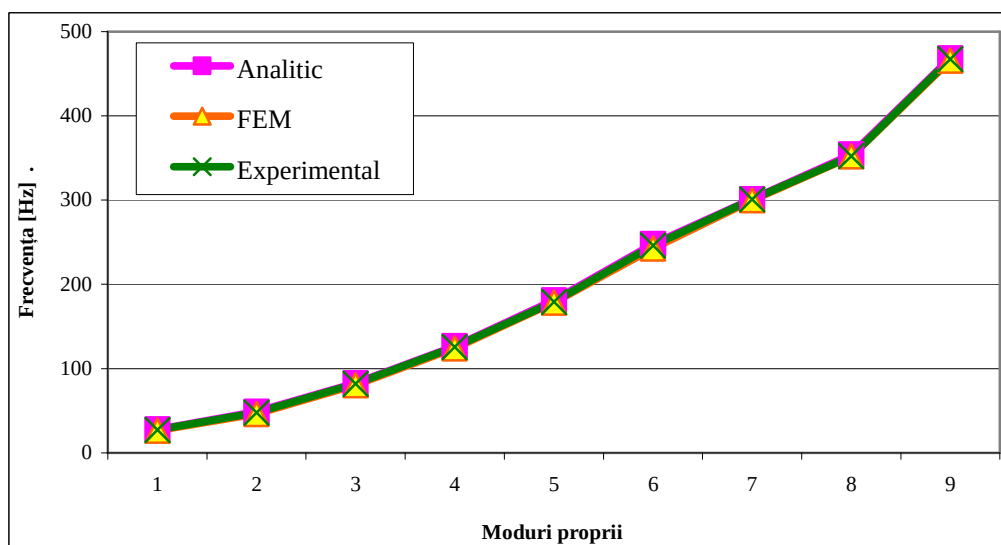


Fig. 4.9. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

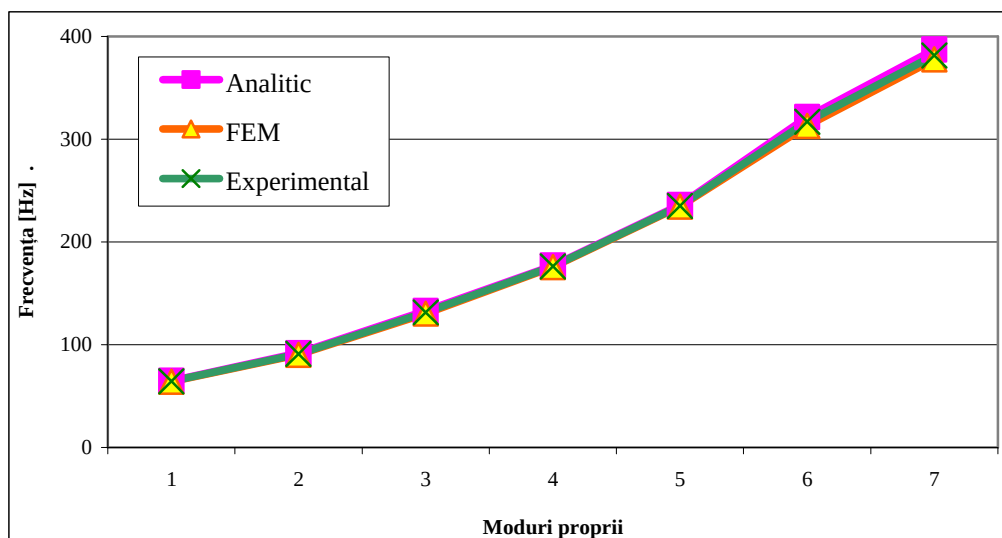


Fig. 4.10. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

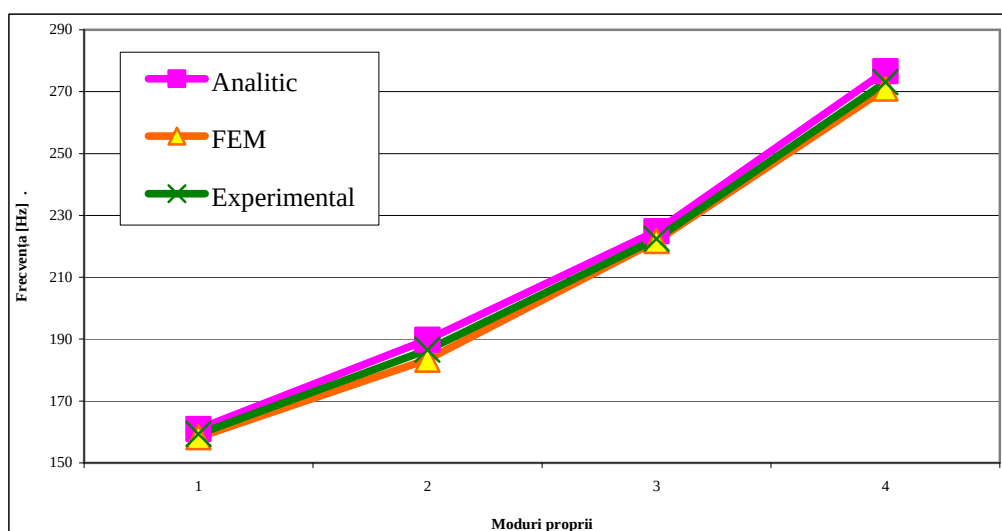


Fig. 4.11. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

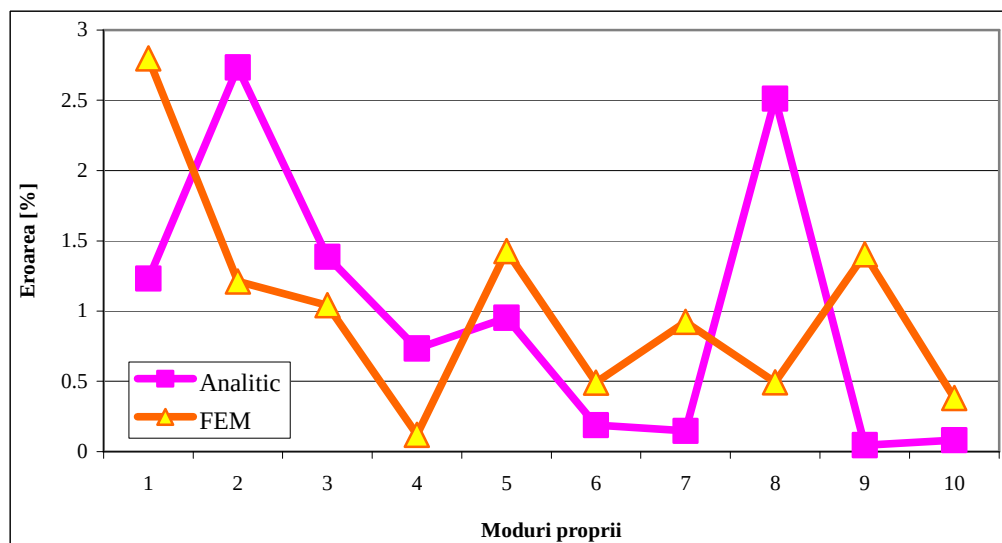


Fig. 4.12. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

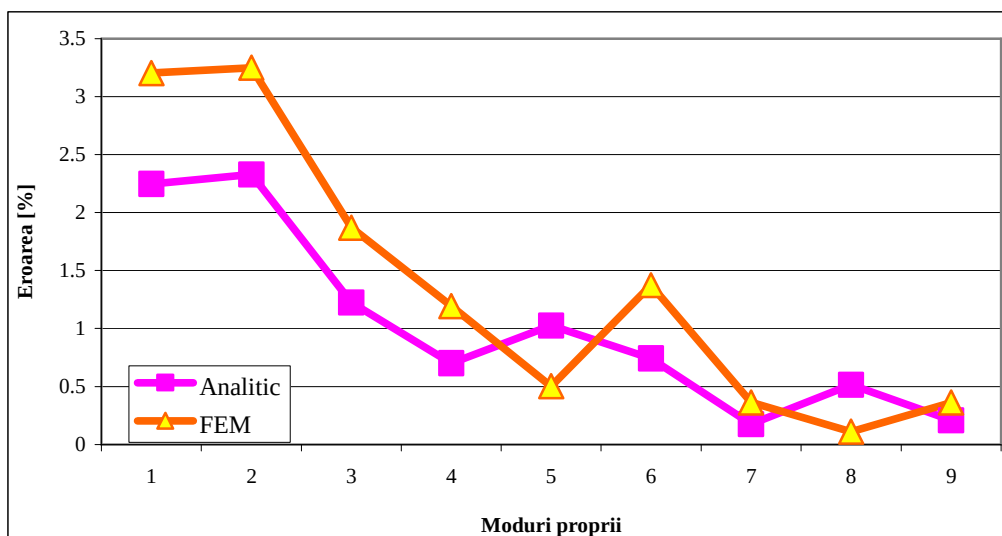


Fig. 4.13. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 9$

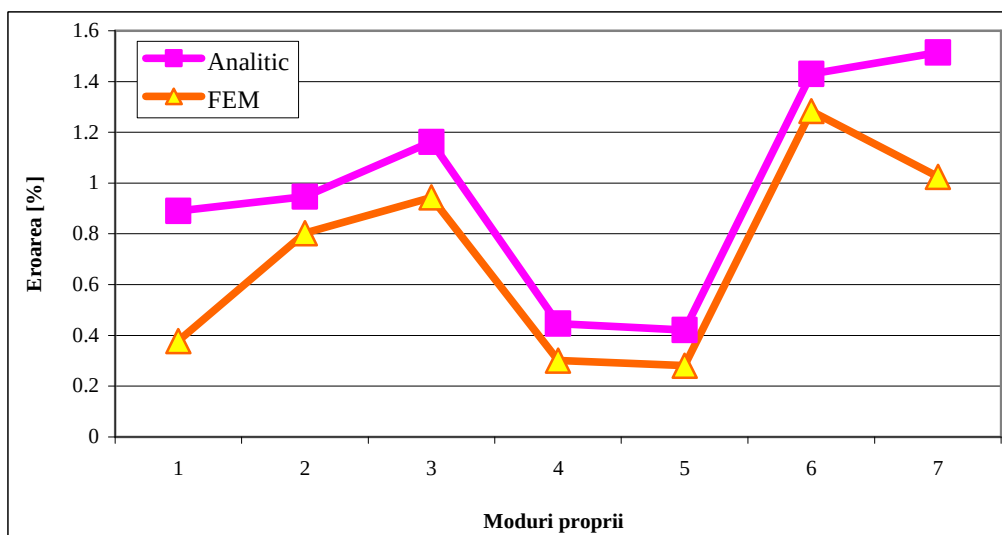


Fig. 4.14. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

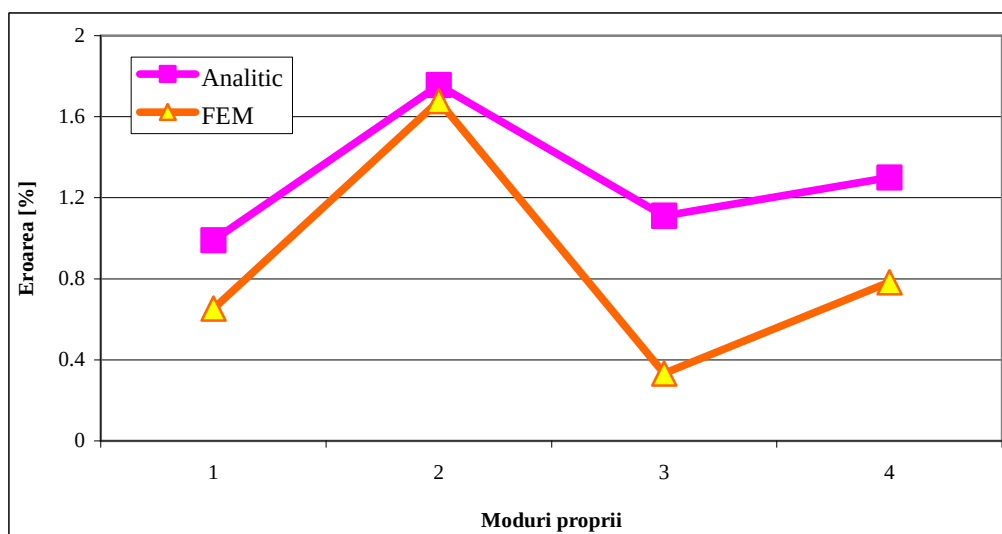


Fig. 4.15. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 4.12 – 4.15 și tabelele 4.6 – 4.9 se observă că pentru experiment eroarea maximă este de 3,24 % pentru modul $m=2$ și $n=2$. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la modul $m=2$.

4.3.2 Rezultatele experimentale în cazul plăcilor încastate pe toate laturile (ÎÎ - ÎÎ)

În acest caz, încadrarea s-a realizat pe toate laturile plăcii, ca în figura 4.16. Dimensiunile plăcii după încadrare, pe toate laturile, sunt: $L=0,95$ m, $l=0,40$ m, $h=0,002$ m.



Fig. 4.16. Standul experimental pentru placa ÎÎ-ÎÎ

Pentru acest experiment s-au făcut 10 citiri de frecvențe proprii în punctul P_1 la mijlocul plăcii și în punctul P_2 situat pe axa longitudinală la $1/6$ din lungimea plăcii. Pentru fiecare citire au fost extrase primele 30 de frecvențe proprii ale plăcii, iar valorile lor medii au fost trecute în tabelele 4.10 – 4.13. Pentru fiecare mod de vibrație s-a făcut media aritmetică pentru valorile citite și această valoare a fost comparată cu valoarea obținută din calculul analitic, respectiv din analiza modală numerică. Măsurătorile s-au făcut cu ajutorul accelerometrului triaxial descris.

Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 4.10 – 4.13, iar valorile abaterii procentuale calculate cu formula (3.1) sunt prezentate în tabelele 4.14 - 4.17, pentru fiecare caz analizat.

În figurile 4.17 – 4.20 se prezintă variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru cazurile analizate, iar în figurile 4.21 – 4.24 se prezintă abaterea procentuală a frecvenței față de frecvența determinată analitic, în funcție de modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

Tabelul 4.10. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile fără defect pentru $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	Experimental [Hz]
1-1	78,143606	73,047	75,5
1-2	92,86676	87,541	89,5
1-3	115,45148	113,94	115
1-4	158,89779	152,73	154,5
1-5	213,20566	203,54	210
1-6	268,37512	265,93	267
1-7	344,40614	339,59	341,5
1-8	431,29875	424,31	428
1-9	529,05293	519,99	525,5
1-10	637,66868	626,5	632

Tabelul 4.11. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile fără defect pentru $m=2$ și $n=1...9$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	Experimental [Hz]
2-1	203,67575	193,99	199,5
2-2	225,39891	208,78	219
2-3	257,98363	234,18	247,5
2-4	301,42993	279,78	298
2-5	345,73781	318,91	335,5
2-6	410,90726	378,66	399
2-7	466,93829	449,92	446
2-8	563,8309	532,56	557
2-9	681,58507	626,45	658,5

Tabelul 4.12. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile fără defect pentru $m=3$ și $n=1...7$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	Experimental [Hz]
3-1	387,47398	375,67	383
3-2	409,19713	390,69	402,5
3-3	441,78185	416,07	434
3-4	485,22816	452,15	478,5
3-5	539,53603	499,21	532
3-6	604,70549	557,51	598
3-7	680,73651	627,11	669,6

Tabelul 4.13. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile fără defect pentru $m=4$ și $n=1...4$

Modul de vibrație m-n	Analitic [Hz]	FEM [Hz]	Experimental [Hz]
4-1	632.53827	617.59	627
4-2	654.26142	632.81	646.5
4-3	686.84615	658.33	681
4-4	730.29245	694.4	719.5

Tabelul 4.14. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM	Experimental
1-1	6,522102	3,38301
1-2	5,73484	3,625366
1-3	1,309191	0,391056
1-4	3,881608	2,767685
1-5	4,533491	1,503553
1-6	0,911083	0,512387
1-7	1,39839	0,843812
1-8	1,620397	0,764841
1-9	1,713048	0,671564
1-10	1,751486	0,888969

Tabelul 4.15. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=2$ și $n=1...9$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM	Experimental
2-1	4,755475	2,050195
2-2	7,37311	2,838927
2-3	9,226799	4,06368
2-4	7,182409	1,137886
2-5	7,759582	2,961149
2-6	7,847819	2,897797
2-7	3,644655	4,484166
2-8	5,546149	1,211516
2-9	8,089243	3,386968

Tabelul 4.16. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=3$ și $n=1...7$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM	Experimental
3-1	3,046393	1,168141
3-2	4,522791	1,663883
3-3	5,820033	1,793053
3-4	6,817032	1,406094
3-5	7,474205	1,416547
3-6	7,804707	1,121319
3-7	7,877719	1,663159

Tabelul 4.17. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe două laturi și liberă pe celelalte două laturi fără defect pentru $m=4$ și $n=1...4$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM	Experimental
4-1	2,36322	0,875563
4-2	3,278723	1,186287
4-3	4,151752	0,851159
4-4	4,914805	1,477826

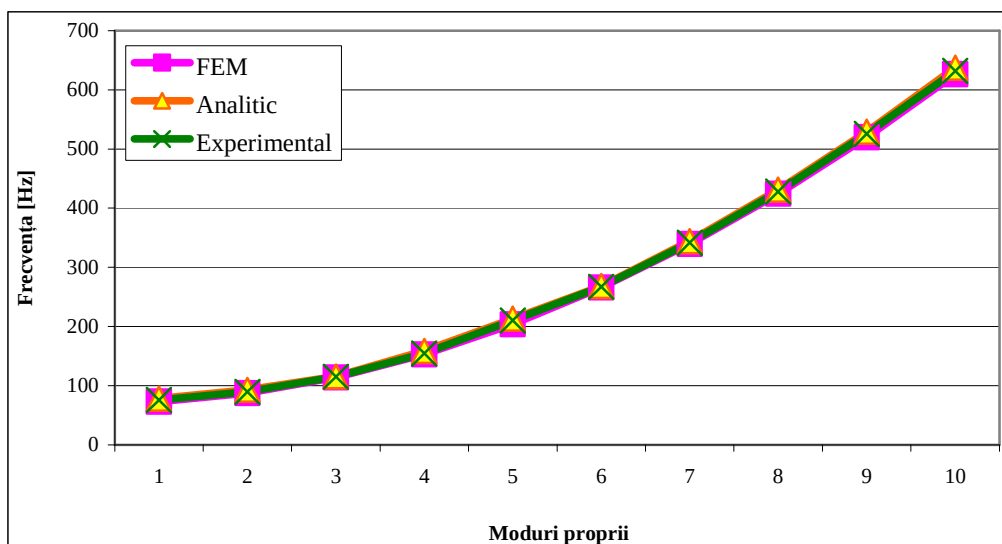


Fig. 4.17. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

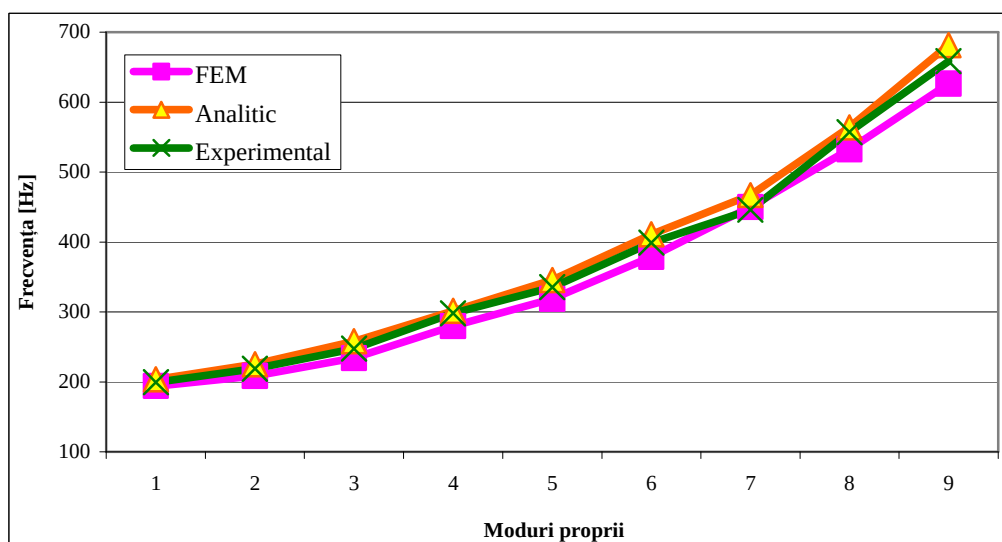


Fig.4.18. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

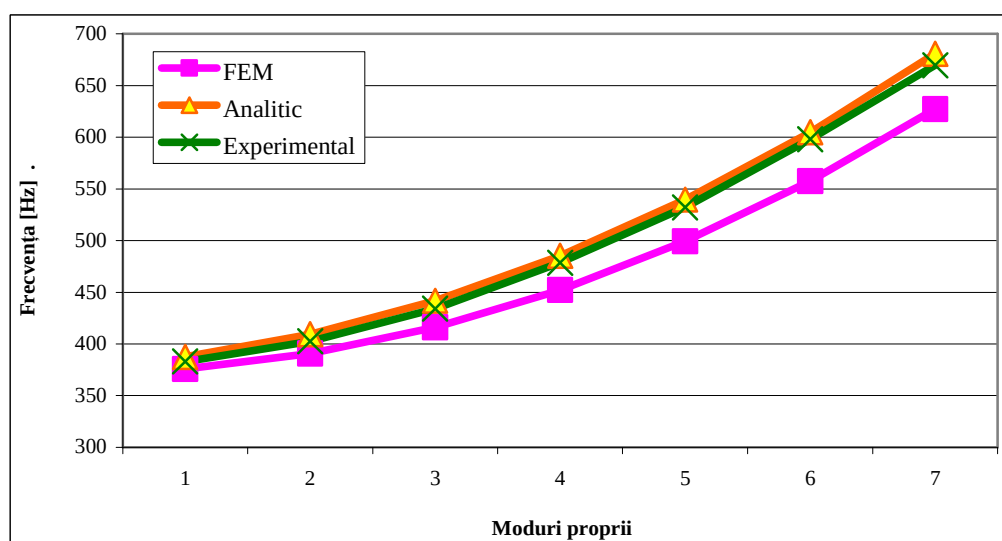


Fig.4.19. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

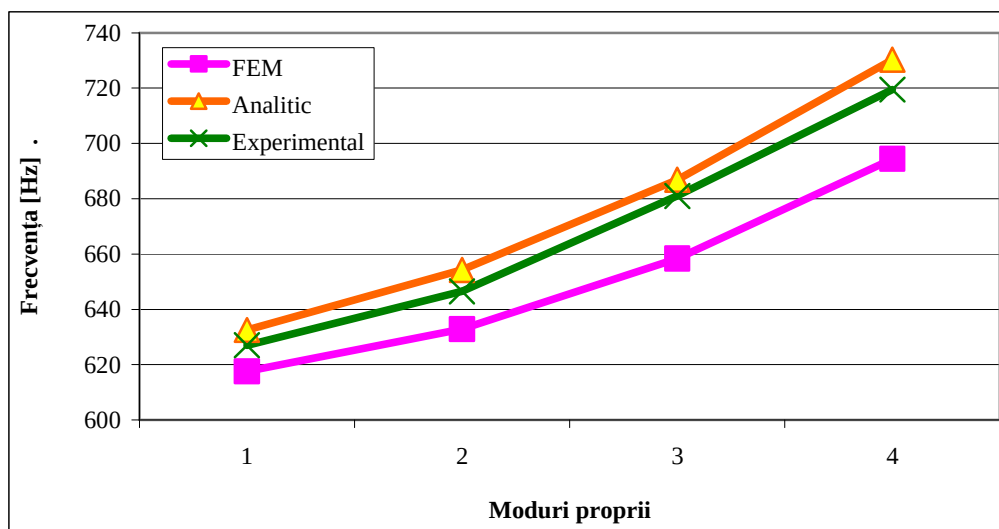


Fig.4.20. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

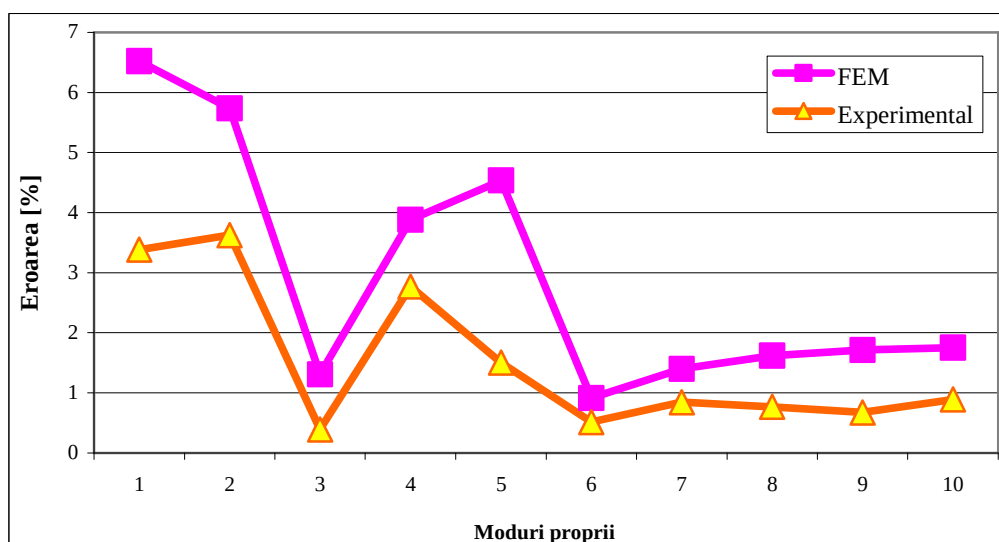


Fig. 4.21. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

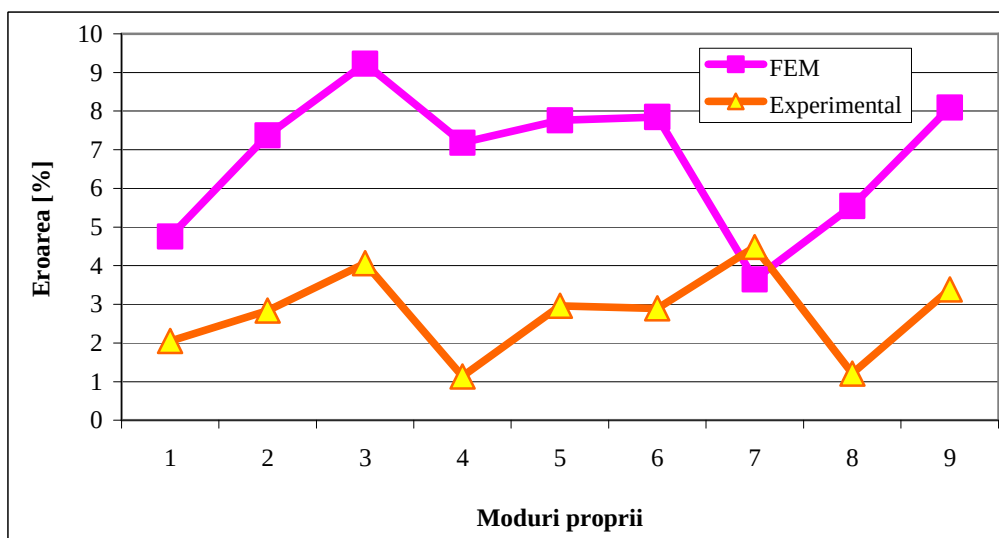


Fig. 4.22. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 9$

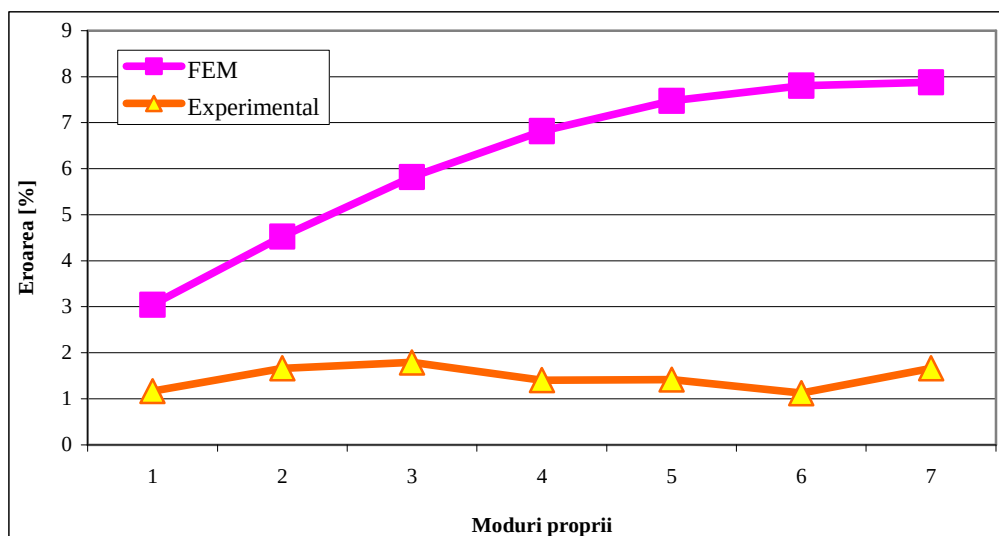


Fig. 4.23. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 7$

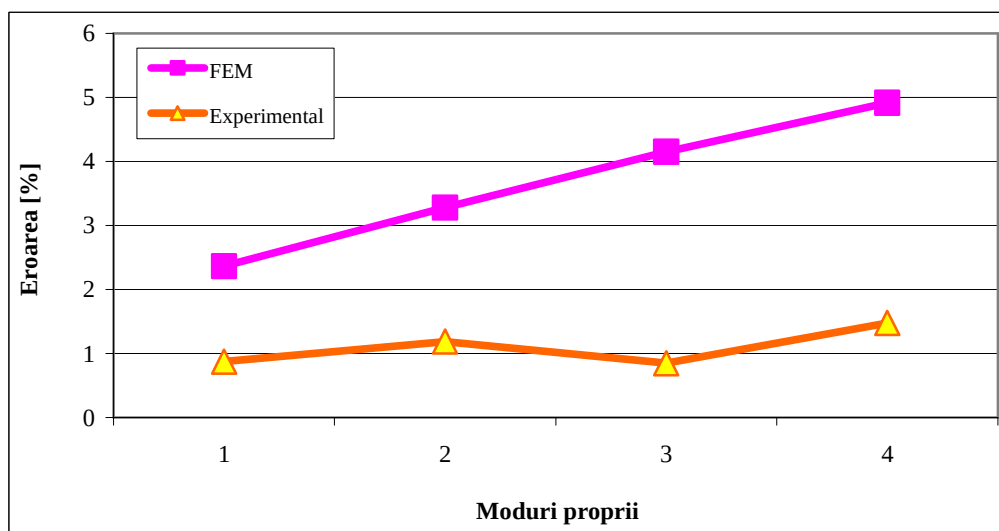


Fig. 4.24. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 4.21 – 4.24 și tabelele 4.6 – 4.9 se observă că pentru experiment eroarea maximă este de 4,28 % pentru modul $m=2$ și $n=7$. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la modul $m= 2$.

4.4 Rezultate experimentale în cazul plăcilor cu defect

Măsurătorile de frecvențe proprii au fost efectuate pe table subțiri dreptunghiulare cu diferite tipuri de defecte, din oțel, având dimensiunile $L= 1$ m, $l= 0,45$ m și $h= 2$ mm. Pentru fiecare experiment s-au făcut cel puțin 10 citiri de frecvențe proprii în punctul P_1 , respectiv P_2 . Pentru fiecare citire au fost extrase primele 30 de frecvențe proprii ale plăcii, iar valorile au fost trecute într-un tabel. Frecvențele proprii s-au citit cu ajutorul accelerometrului descris

în paragraful 4.2. Valorile frecvențelor proprii măsurate au fost comparate cu frecvențele proprii obținute pe cale analitică și prin metoda elementului finit [27].

4.4.1 Rezultatele experimentale în cazul plăcilor încastrate pe toate laturile cu defect central

În acest caz, analiza s-a făcut pe o placă reală încastrată pe contur, cu defect în centrul plăcii de tip străpuns, având dimensiunile de $4,9 \times 101$ mm. Dimensiunile plăcii după încastrare, sunt $L=0,95$ m, $l=0,40$ m și $h=0,002$ m.



Fig. 4.25. Standul experimental pentru placa ÎÎ-ÎÎ, cu defect central de $4,9 \times 101,6$

Pentru acest experiment s-au făcut 10 citiri de frecvențe proprii în punctul P_1 , la mijlocul plăcii și în punctul P_2 situat pe axa longitudinală la $1/6$ din lungimea plăcii. Pentru fiecare citire au fost extrase primele 30 de frecvențe proprii ale plăcii, iar valorile lor medii au fost trecute în tabelele 4.10 – 4.13. Pentru fiecare mod de vibrație s-a făcut media aritmetică pentru valorile citite și această valoare a fost comparată cu valoarea obținută din calculul analitic, respectiv din analiza modală numerică. Măsurătorile s-au făcut cu ajutorul accelerometrului triaxial descris.

Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 4.18 – 4.21, iar valorile abaterii procentuale calculate cu formula (3.1) sunt prezentate în tabelele 4.22 – 4.25, pentru fiecare caz analizat.

În figurile 4.26 – 4.29 se prezintă variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru cazurile analizate, iar în figurile 4.30 – 4.33 se prezintă abaterea procentuală a frecvenței față de frecvența determinată analitic, în funcție de modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

Tabelul 4.18. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=1$ și $n=1\dots10$

Modul de vibrație m-n	Fără defect [Hz]	FEM 4,9x101,6 [Hz]	Experimental 4,9x101,6 [Hz]
1-1	73,047	70,922	72,12
1-2	87,541	87,491	87,51
1-3	113,94	112,45	113,02
1-4	152,73	152,57	152,63
1-5	203,54	202,25	203,02
1-6	265,93	265,57	265,68
1-7	339,59	337,69	338,63
1-8	424,31	423,7	424,11
1-9	519,99	519,31	519,64
1-10	626,5	625,67	626,12

Tabelul 4.19. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=2$ și $n=1\dots9$

Modul de vibrație m-n	Fără defect [Hz]	FEM 4,9x101,6 [Hz]	Experimental 4,9x101,6 [Hz]
2-1	193,99	192,51	199,5
2-2	208,78	208,63	219
2-3	234,18	232,2	247,5
2-4	270,78	270,34	298
2-5	318,91	315,86	335,5
2-6	378,66	377,89	399
2-7	449,92	445,01	453
2-8	532,56	531,06	557
2-9	626,45	624,36	658,5

Tabelul 4.20. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=3$ și $n=1...7$

Modul de vibrație m-n	Fără defect [Hz]	FEM 4,9x101,6 [Hz]	Experimental 4,9x101,6 [Hz]
3-1	375,67	359,92	367,23
3-2	390,69	390,39	390,43
3-3	416,07	407,87	412,27
3-4	452,15	451,18	451,98
3-5	499,21	492,24	496,61
3-6	557,51	555,77	556,17
3-7	627,11	621,74	624,52

Tabelul 4.21. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=4$ și $n=1...4$

Modul de vibrație m-n	Fără defect [Hz]	FEM 4,9x101,6 [Hz]	Experimental 4,9x101,6 [Hz]
4-1	617,59	583,47	602,32
4-2	632,81	632,49	632,65
4-3	658,33	645,58	654,65
4-4	694,4	693,06	693,98

Tabelul 4.22. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM 4,9x101,6	Experimental 4,9x101,6
1-1	2,909086	1,269046
1-2	0,057116	0,035412
1-3	1,307706	0,807443
1-4	0,10476	0,065475
1-5	0,633782	0,255478
1-6	0,135374	0,09401
1-7	0,559498	0,282694
1-8	0,143763	0,047135
1-9	0,130772	0,067309
1-10	0,132482	0,060654

Tabelul 4.23. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=2$ și $n=1\dots9$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM 4,9x101,6	Experimental 4,9x101,6
2-1	4,755475	2,050195
2-2	7,37311	2,838927
2-3	9,226799	4,06368
2-4	7,182409	1,137886
2-5	7,759582	2,961149
2-6	7,847819	2,897797
2-7	3,644655	2,985039
2-8	5,546149	1,211516
2-9	8,089243	3,386968

Tabelul 4.24. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=3$ și $n=1\dots7$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM 4,9x101,6	Experimental 4,9x101,6
3-1	4,192509	2,246653
3-2	0,076787	0,066549
3-3	1,970822	0,913308
3-4	0,214531	0,037598
3-5	1,396206	0,520823
3-6	0,312102	0,240354
3-7	0,856309	0,413006

Tabelul 4.25. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect pentru $m=4$ și $n=1\dots4$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM 4,9x101,6	Experimental 4,9x101,6
4-1	5,524701	2,472514
4-2	0,050568	0,025284
4-3	1,936719	0,55899
4-4	0,192972	0,060484

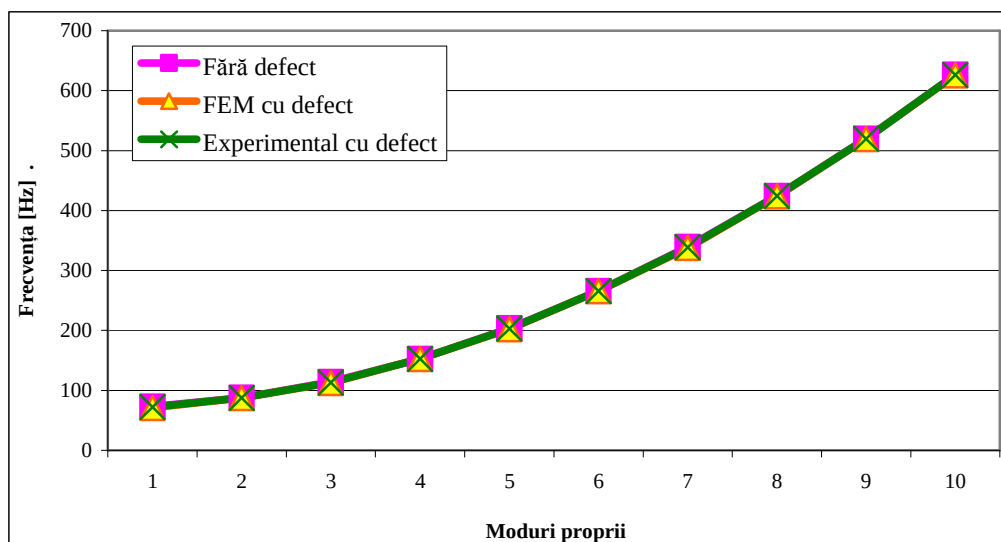


Fig. 4.26. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

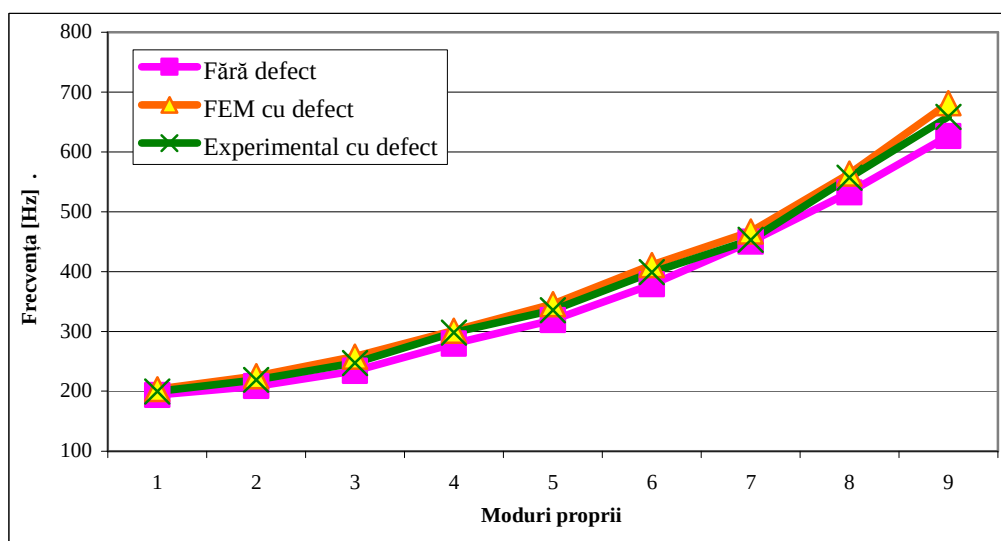


Fig. 4.27. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

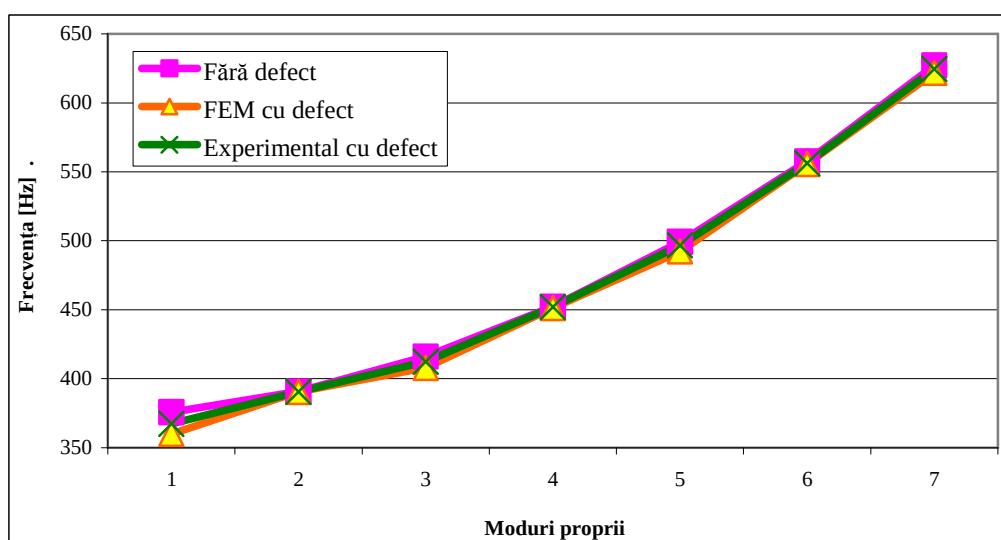


Fig. 4.28. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

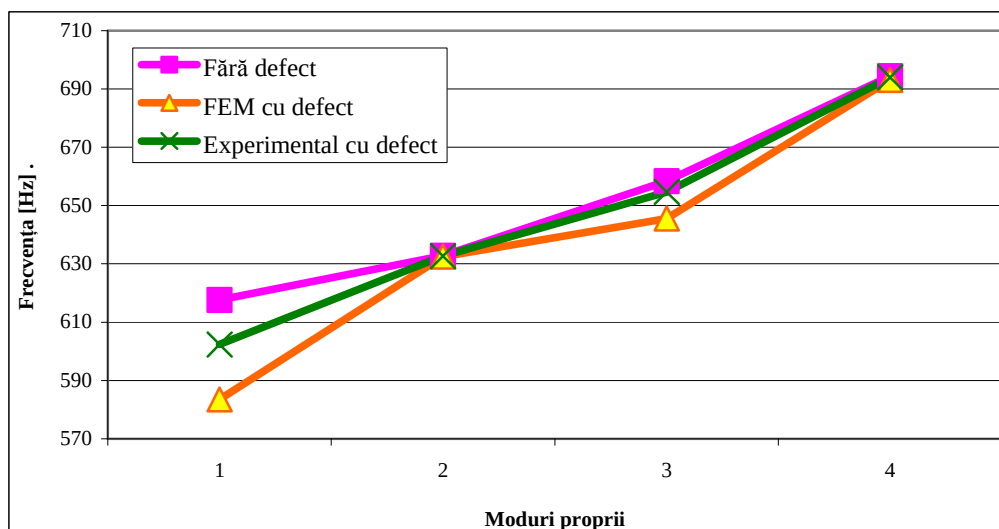


Fig. 4.29. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

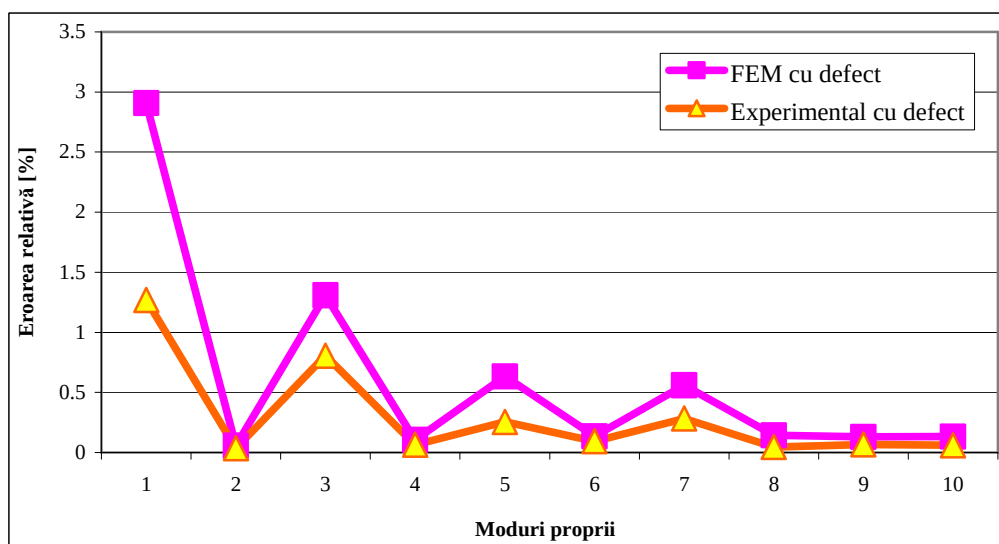


Fig. 4.30. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

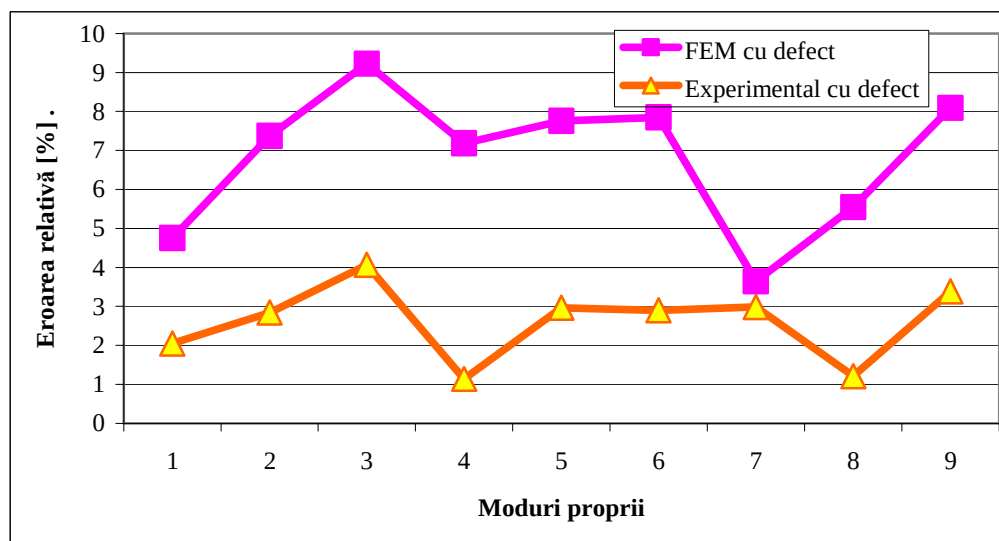


Fig. 4.31. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 9$

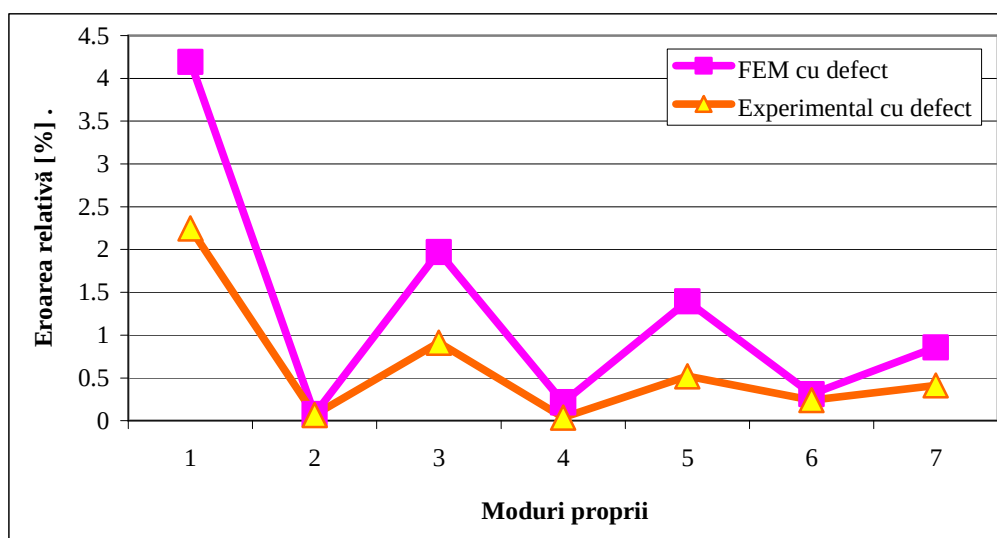


Fig. 4.32. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 7$

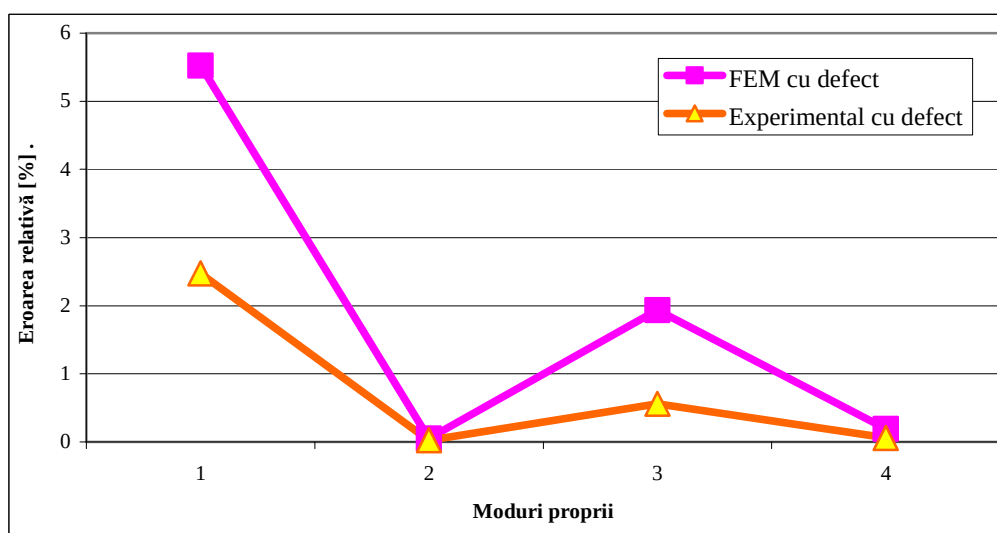


Fig. 4.33. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 4.30 – 4.33 și tabelele 4.22 – 4.25 se observă că pentru experiment eroarea maximă este de 4,06 % pentru modul $m=2$ și $n=3$. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la modul $m= 2$.

4.4.2. Rezultatele experimentale în cazul plăcilor încastrate pe toate laturile cu defect lateral

În acest caz, analiza s-a făcut pe o placă reală încastrată pe contur, cu defect lateral de tip străpuns, având dimensiunile de 5,8×77,5 mm (figura 4.34). Dimensiunile plăcii după încastrare sunt $L= 0,95$ m, $l= 0,40$ m și $h= 0,002$ m.



Fig. 4.34. Standul experimental pentru placa ÎÎ-ÎÎ, cu defect central de 5,8×77,5 mm

Pentru acest experiment s-au făcut 10 citiri de frecvențe proprii în punctul P_1 , la mijlocul plăcii și în punctul P_2 , situat pe axa longitudinală la $1/6$ din lungimea plăcii. Pentru fiecare citire au fost extrase primele 30 de frecvențe proprii ale plăcii, iar valorile lor medii au fost trecute în tabelele 4.10 – 4.13. Pentru fiecare mod de vibrație s-a făcut media aritmetică pentru valorile citite, și această valoare a fost comparată cu valoarea obținută din calculul analitic, respectiv din analiza modală numerică. Măsurătorile s-au făcut cu ajutorul accelerometrului triaxial descris.

Rezultatele obținute sunt prezentate numeric în tabelele 4.26 – 4.29, iar valorile abaterii procentuale calculate cu formula (3.1) sunt prezentate în tabelele 4.30 - 4.33, pentru fiecare caz analizat.

Tabelul 4.26. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	Fără defect [Hz]	FEM 5,8×77,5 [Hz]	Experimental 5,8×77,5 [Hz]
1-1	73,047	73,013	73,03
1-2	87,541	87,354	87,46
1-3	113,94	113,67	113,82
1-4	152,73	152,58	152,65
1-5	203,54	203,41	203,44
1-6	265,93	265,44	265,75
1-7	339,59	338,99	339,24
1-8	424,31	423,89	424,05
1-9	519,99	519,73	519,83
1-10	626,5	626,02	626,4

Tabelul 4.27. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=2$ și $n=1...9$

Modul de vibrație m-n	Fără defect [Hz]	FEM 5,8×77,5 [Hz]	Experimental 5,8×77,5 [Hz]
2-1	193,99	192,53	193,43
2-2	208,78	206,23	207,26
2-3	234,18	232,65	233,46
2-4	270,78	270,32	270,53
2-5	318,91	318,44	318,64
2-6	378,66	377,51	378,04
2-7	449,92	448,13	449,25
2-8	532,56	531,69	532,14
2-9	626,45	625,42	625,97

Tabelul 4.28. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=3$ și $n=1...9$

Modul de vibrație m-n	Fără defect [Hz]	FEM 5,8×77,5 [Hz]	Experimental 5,8×77,5 [Hz]
3-1	375,67	371,27	373,54
3-2	390,69	386,67	388,95
3-3	416,07	413,65	415,56
3-4	452,15	451,49	451,89
3-5	499,21	498,04	498,95
3-6	557,51	553,35	555,76
3-7	627,11	625,02	626,65

Tabelul 4.29. Valorile frecvențelor proprii experimentale pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=4$ și $n=1...4$

Modul de vibrație m-n	Fără defect [Hz]	FEM 5,8×77,5 [Hz]	Experimental 5,8×77,5 [Hz]
4-1	617,59	613,64	615,65
4-2	632,81	629,97	630,78
4-3	658,33	655,86	657,76
4-4	694,4	693,74	693,98

Tabelul 4.30. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=1$ și $n=1...10$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM 5,8×77,5	Experimental 5,8×77,5
1-1	0,046545	0,023273
1-2	0,213614	0,092528
1-3	0,236967	0,105319
1-4	0,098213	0,05238
1-5	0,06387	0,04913
1-6	0,184259	0,067687
1-7	0,176684	0,103065
1-8	0,098984	0,061276
1-9	0,050001	0,03077
1-10	0,076616	0,015962

Tabelul 4.31. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=2$ și $n=1...9$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM 5,8×77,5	Experimental 5,8×77,5
2-1	0,752616	0,28951
2-2	1,221381	0,733378
2-3	0,653344	0,308404
2-4	0,16988	0,092411
2-5	0,147377	0,084735
2-6	0,303703	0,164004
2-7	0,397849	0,149137
2-8	0,163362	0,078927
2-9	0,164419	0,076681

Tabelul 4.32. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=3$ și $n=1\dots7$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM 5,8×77,5	Experimental 5,8×77,5
3-1	1,171241	0,566987
3-2	1,028949	0,445366
3-3	0,581633	0,122576
3-4	0,145969	0,057503
3-5	0,23437	0,052082
3-6	0,746175	0,313896
3-7	0,333275	0,073352

Tabelul 4.33. Modificarea frecvenței proprii pentru placa încastrată pe toate laturile cu defect lateral pentru $m=4$ și $n=1\dots4$

Modul de vibrație m-n	ε [%]	
	FEM 5,8×77,5	Experimental 5,8×77,5
4-1	0,639583	0,476044
4-2	0,448792	0,320791
4-3	0,375192	0,086583
4-4	0,095046	0,060484

În figurile 4.35 – 4.38 se prezintă variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru cazurile analizate, iar în figurile 4.39 – 4.42 se prezintă abaterea procentuală a frecvenței față de frecvența determinată analitic, în funcție de modurile de vibrație pentru aceste cazuri.

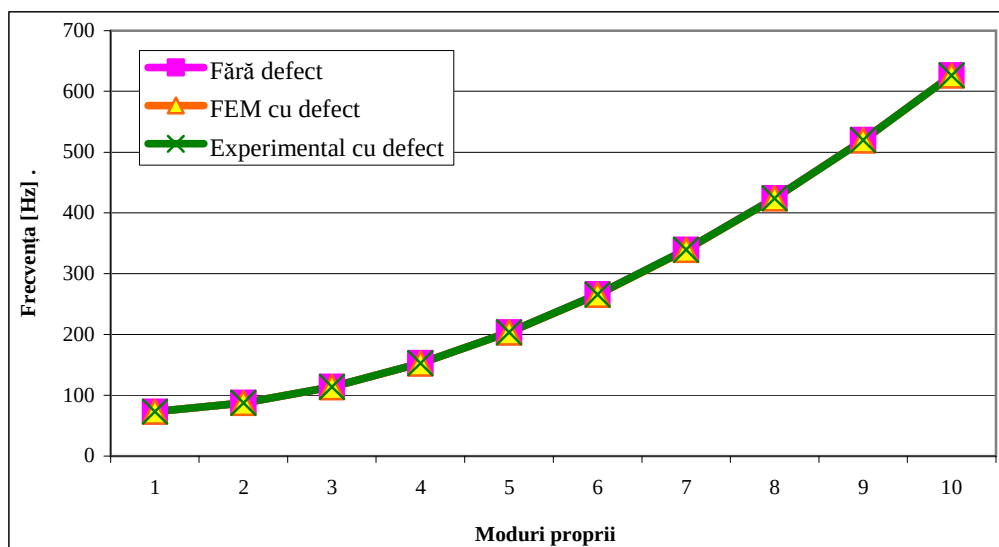


Fig. 4.35. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

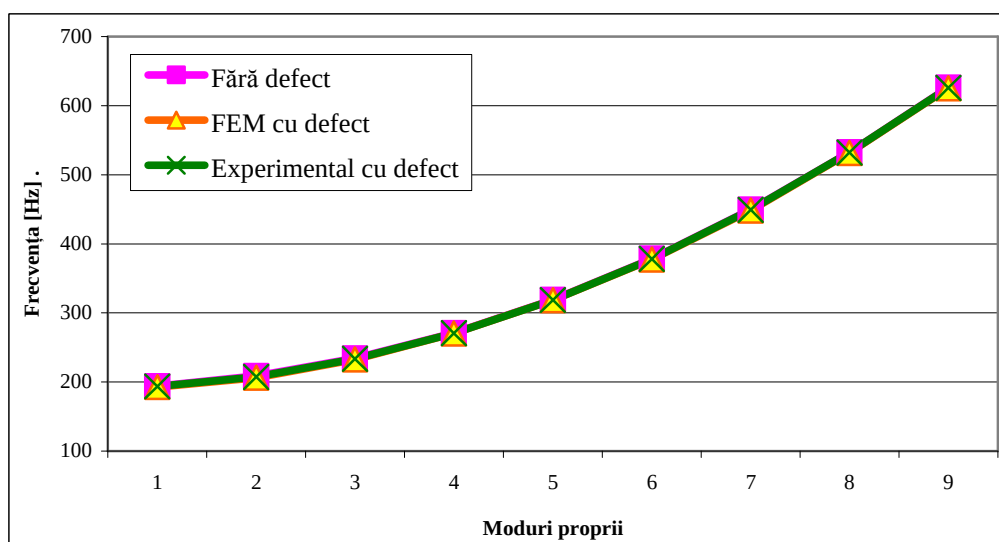


Fig. 4.36. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

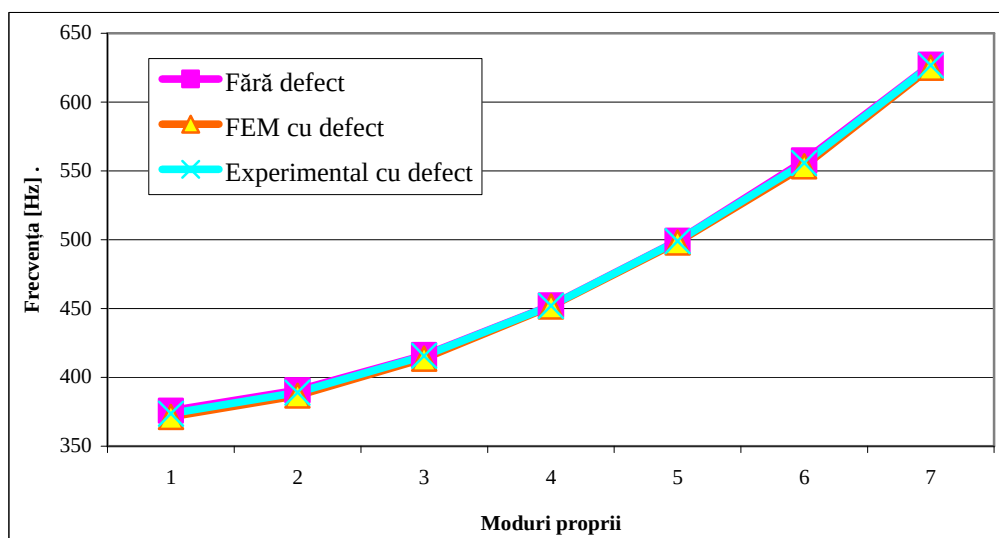


Fig. 4.37. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

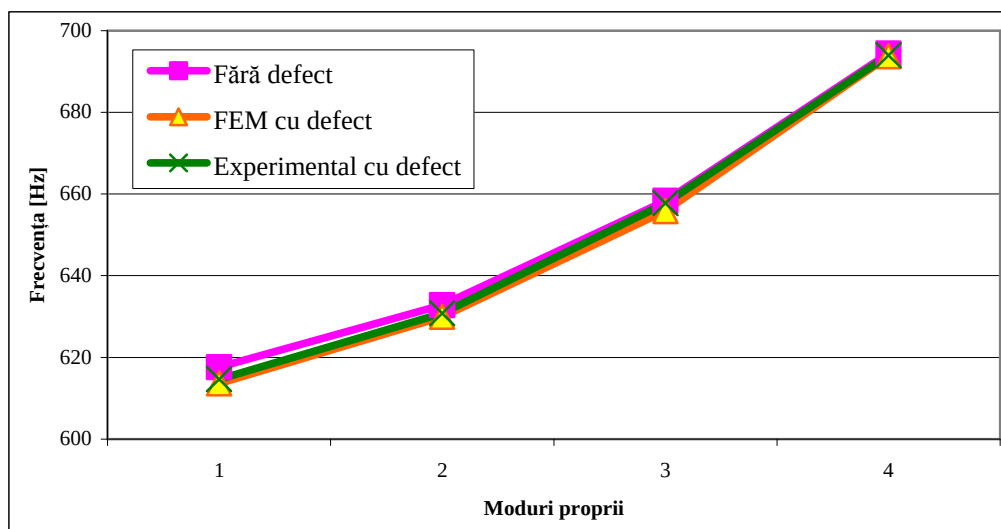


Fig. 4.38. Variația frecvenței în funcție de modurile de vibrație pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

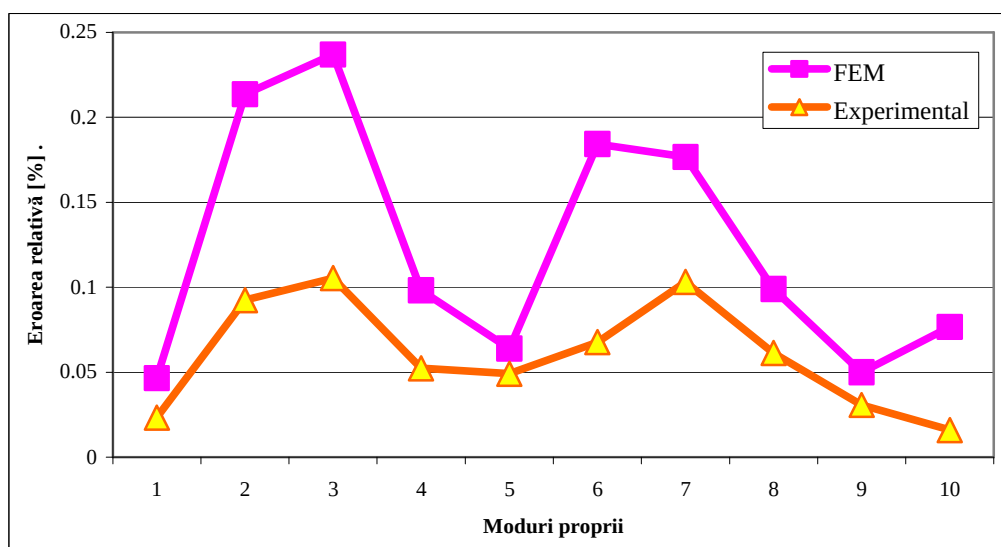


Fig. 4.39. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=1$ și $n=1\div 10$

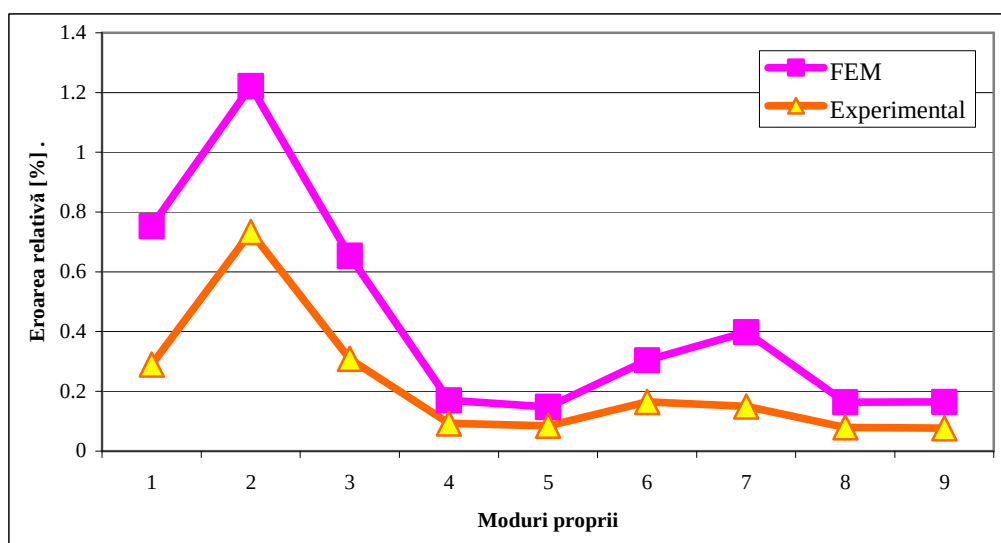


Fig. 4.40. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=2$ și $n=1\div 9$

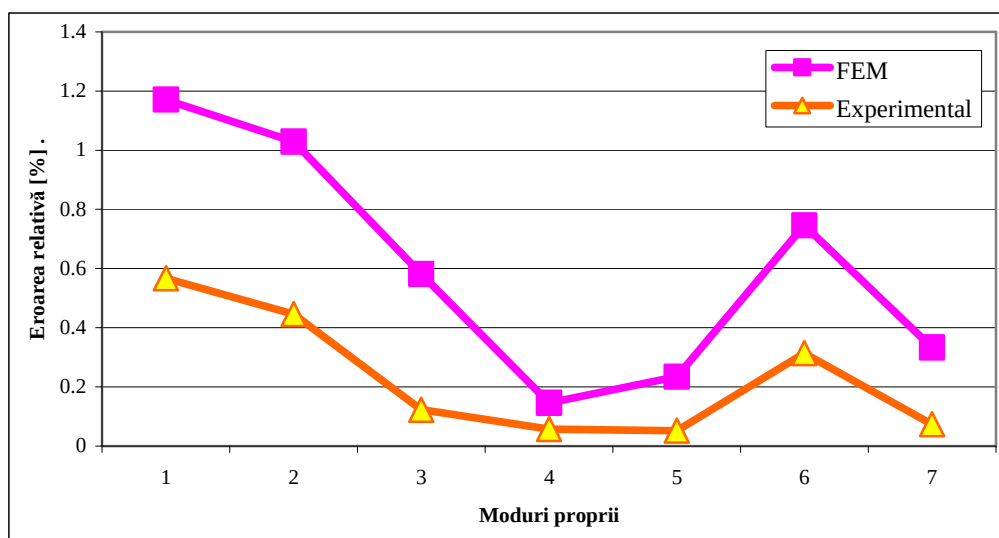


Fig. 4.41. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=3$ și $n=1\div 7$

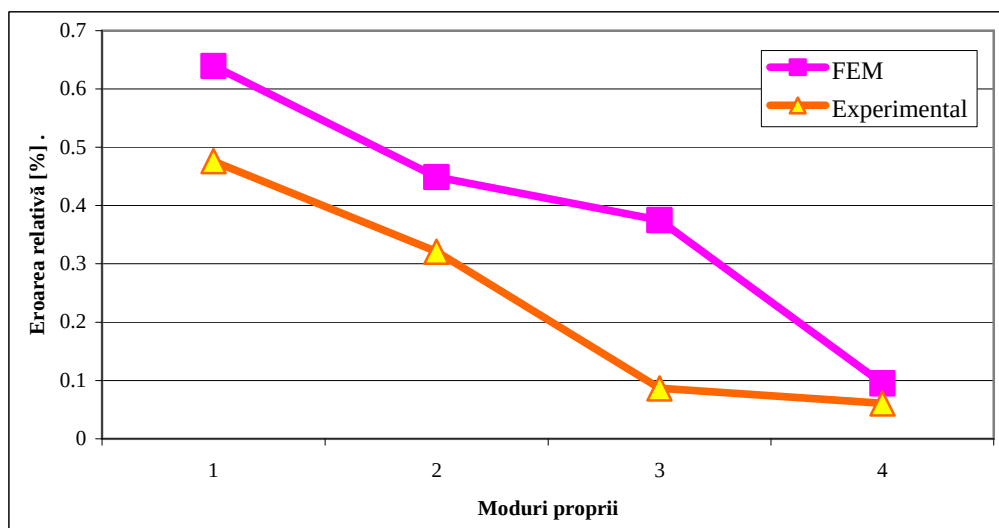


Fig. 4.42. Abaterea procentuală a frecvenței pentru $m=4$ și $n=1\div 4$

Din rezultatele prezentate în figurile 4.39 – 4.42 și tabelele 4.29 – 4.33 se observă că pentru experiment eroarea maximă este de 0,73 % pentru modul $m=2$ și $n=2$. De asemenea, se remarcă faptul că abateri mai mari apar la modul $m= 2$.

4.6 Concluzii parțiale – analiza experimentală

Încercările experimentale au confirmat pe de-o parte valabilitatea relațiilor dezvoltate analitic și sunt în concordanță cu rezultatele obținute prin analiză numerică.

Standul experimental și instrumentația computațională și informatică utilizează performanțe și metodele de analiză modală concepute pentru experimentări au permis citirea precisă și sigură a frecvențelor proprii, pentru diversele cazuri analizate.

S-a pus în evidență faptul că poziția și dimensiunea defectului sunt caracterizate de modificarea relativă a frecvențelor grupate pe moduri relevante, iar pentru dimensiuni importante ale defectelor, frecvența plăcilor în stare intactă nu mai poate fi luată ca reper.

În acest caz, pierderea de masă trebuie luată în considerare.

CAPITOLUL 5. CONCLUZII, CONTRIBUȚII PERSONALE

5.1 Concluzii finale

Lucrările de cercetare efectuate în scopul elaborării tezei sub forma sintetică prezentată pot fi caracterizate prin următoarele concluzii esențiale, și anume:

- a) Analiza tipologiei defectelor atât ca formă geometrică, cât și ca amplasament în structura plăcilor elastice subțiri, pe baza unei consultări bibliografice ample, selectată și apreciată în mod critic;
- b) Conceperea, elaborarea și stabilirea modelelor analitice de determinare a pulsațiilor și frecvențelor proprii, respectiv a formelor proprii pentru plăci elastice subțiri fără defecte pentru diferite condiții de limită și de prindere pe contur;
- c) Conceperea și fundamentarea metodei de analiză modală a plăcilor elastice subțiri fără defecte, având drept criteriu de apreciere compararea frecvențelor proprii obținute prin FEM cu frecvențele proprii obținute analitic;
- d) Conceperea și fundamentarea metodei de analiză modală a plăcilor elastice subțiri cu defecte vizibile semnificative, având drept criteriu de apreciere „semnătura” modală în funcție de categoria și dimensiunile defectului;
- e) Analiza multicriterială a comportării dinamice modale a plăcilor elastice subțiri, pe baza numeroaselor stări modale considerate, în funcție de varietățile dimensionale și geometrice ale defectelor. Analiza armonică modală la impulsurile inițiale aplicate plăcilor a fost elaborată, realizată și verificată experimental, în funcție de forma geometrică, pentru cazul încastrat pe contur;
- f) Conceperea și aplicarea unei metode hibride, instrumental-experimentală de analiză armonică, privind evidențierea, măsurarea și prelucrarea semnalelor în domeniul timp, respectiv frecvență, astfel încât să poată fi evidențiată influența defectelor din structura unei plăci elastice subțiri, având ca sistem de referință comportamentul dinamic al plăcii în starea inițială fără defecte;
- g) Gruparea, clasificarea și stocarea rezultatelor obținute pe cale numerică și experimentală, astfel încât să fie utilizabile atât de către inginerii proiectanți, structuriști de expertiză tehnică, cât și de inginerii de execuție curentă și de mentenanță a structurilor din metal în mod calificat.

5.2 Contribuții proprii

Contribuțiile proprii cu caracter de originalitate care au construit baza inovativă a lucrării sunt următoarele:

- a) Adoptarea modelelor analitice pentru plăcile elastice subțiri cu variate condiții de rezemare, astfel încât formele proprii să corespundă deformărilor reale în timpul mișcării de vibrație transversală;
- b) Validarea prin analiză numerică a relațiilor analitice concepute, pentru placa fără defect cu diferite prinderi pe contur;
- c) Elaborarea și fundamentarea metodei de analiză a caracteristicilor modale utilizând metoda elementului finit pentru același tip de placă încastrată pe contur, fără și cu multiple defecte definite ca formă geometrică și ca poziție;
- d) Conceperea și fundamentarea unei metode de analiză experimentală utilizând tehnică computațională și informatică performantă, menită să determine în mod cert și semnificativ modificarea comportării modale dinamice a plăcilor elastice subțiri cu defecte comparativ cu starea inițială intactă;
- e) Stabilirea metodei de identificare a „semnăturii” defectelor, atât ca poziție, cât și ca formă geometrică și dimensiuni, astfel încât răspunsul modal să se constituie într-o „amprentă” elocventă, certă și sigură;
- f) Evidențierea influenței masei plăcii asupra „semnăturii” defectului și sublinierea necesității utilizării unei baze de comparare adaptată modificării masei totale a plăcii.

5.3 Diseminarea rezultatelor

Cercetările derulate în perioada de cercetare doctorală s-au concretizat în următoarele materiale prezentate în cadrul unor conferințe naționale de profil, respectiv publicate în reviste de specialitate și o carte.

1. **Hațiegan C.**, *The Ben Daniel-Duke Model Applied to Semiconductor Heterostructure - Part 1*, Annals of the University “Eftimie Murgu” of Reșița, Anul XVI, Nr. 1, ISSN 1453 – 7397, 2009 (indexată BDI).

2. **Hațiegan C.**, *The Ben Daniel-Duke Model Applied to Semiconductor Heterostructure - Part 2*, Annals of the University “Eftimie Murgu” of Reșița, Anul XVI, Nr. 1, ISSN 1453 – 7397, 2009 (indexată BDI).

3. **Hațiegan C.**, *Properties of the solutions of a system of coupled Schrödinger equations*, Analele Universității de Vest din Timișoara Vol. LIV, Seria Fizică, ISSN: 1224-9718, 2010 (indexată BDI).
4. Suci L., Tătu I., Marta C., Tufoi M., **Hațiegan C.**, *The Stand for Determination of Service Performance in Load of a Welding Transformer Using the LabVIEW Environment*, Annals of the University “Eftimie Murgu” of Reșița, Anul XVII, Nr. 2, ISSN 1453 – 7397, 2010 (indexată BDI).
5. Răduca M., Răduca E., **Hațiegan C.**, Ungureanu D., *Fuzzy controller for adjustment of liquid level in the tank*, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, Volume 38(4), Pag. 33-43 ISSN:1223-6934, 2011 (indexată BDI).
6. Cîndea L., **Hațiegan C.**, Marta C., Roșu M., *Research on the Calculus of the Equivalent Strain of an Elasto-Tactile System for the Monitoring of the Play / Joint during Welding*, Annals of the University “Eftimie Murgu” of Reșița, Anul XVIII, Nr. 3, ISSN 1453 – 7397, 2011 (indexată BDI).
7. Suci L., **Hațiegan C.**, Gillich G.R., Marta C., Nedeloni M., *Research regarding vibration damping in systems with a degree of freedom*, Scientific Bulletin of “Politehnica” University of Timișoara, vol. 57 (71) 1, ISSN 12246069, 2012 (indexată BDI).
8. Sajfert V., Nicolina P., Duric M., Popov D., **Hațiegan C.**, *About some thermodynamical properties of cylindrical nanorods*, Romanian Reports in Physics, 64, nr. 4, pag. 1019–1027, 1221-1451 43 822, 2012 (cotată ISI: 1,123)
9. Răduca M., **Hațiegan C.**, Budai A.M., Răduca E., Pop N., *Optimization conditions of stator winding insulation of hydrogenerator*, Volumul Conferinței, ISSN 2067-4147, pp. 316-321, 2012 (indexată BDI).
10. **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Răduca M., Budai A. M., Muntean F., Răduca E., *Finite Element Analysis Of Natural Frequencies And Mass Participation Coefficients For Thin Plates With Defects*, Scientific Bulletin of “Politehnica” University of Timișoara, vol. 57 (71) 2, ISSN 12246069, 2012 (indexată BDI).
11. Novăcescu F., **Hațiegan C.**, Răduca M., Răduca E., Pop N., Nedeloni M., *A New Method for Testing the No-Load Work of an Electric One-Phase Transformer Using The Graphical Programming*, Scientific Bulletin of “Politehnica” University of Timișoara, vol. 57 (71) 2, ISSN 12246069, 2012 (indexată BDI).
12. **Hațiegan C.**, Nedeloni M. D., Tufoi M., Protocsil C., Răduca M., *Modal Analysis Of Natural Frequencies And Mass Participation Coefficients Of Simply Supported Thin Plates*

With Damages, Constanța Maritime University Annals, Anul XIV, Volum 19, ISSN: 1582-3601, Pag. 115-120, 2013 (indexată BDI).

13. **Hațiegan C.**, Tufoi M., Răduca E., Protocsil C., Mitulețu C., *Modal Analysis Through Solidworks Software Of Clamped Thin Plates With Damages*, Constanța Maritime University Annals, Anul XIV, Volum 19, ISSN: 1582-3601, Pag. 121-124, 2013 (indexată BDI).

14. **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Gillich N., Tufoi M., Răduca M., *Modal Analysis of Thin Plates with Damage Simply Supported on all Edges*, Analele Universității "EFTIMIE MURGU", Fascicula de Inginerie, Anul XX, Nr. 1, Reșița, 2013 (indexată BDI).

15. **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Răduca E., Nedeloni M. D., Cîndea L., *Equation of Motion and Determining the Vibration Mode Shapes of a Rectangular Thin Plate Simply Supported on Contour Using MATLAB*, Analele Universității "Eftimie Murgu", Fascicula de Inginerie, Anul XX, Nr. 1, Reșița, 2013 (indexată BDI).

16. **Hațiegan C.**, Răduca M., Frunzăverde D., Răduca E., Pop N., Gillich G. R., *The modeling and simulation of the thermal analysis on the hydrogenerator stator winding insulation*, J Therm Anal Calorim, 1572-8943, September 2013, Volume 113, Issue 3, pp. 1217-1221 (cotată ISI: 1,982)

17. Tufoi M., **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Protocsil C., Negru I., *Frequency Changes in Thin Rectangular Plates due to Geometrical Discontinuities. Part I: Finite Element Analysis*, Analele Universității "EFTIMIE MURGU", Fascicula de Inginerie, Anul XX, Nr. 3, Reșița, 2013 (indexată BDI).

18. Tufoi M., **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Vasile O., *Frequency Changes in Thin Rectangular Plates due to Geometrical Discontinuities. Part II: Frequency Shift Interpretation*, Analele Universității "Eftimie Murgu", Fascicula de Inginerie, Anul XX, Nr. 3, Reșița, 2013 (indexată BDI).

19. Vasile Iancu, Carla Protocsil, Nicoleta Gillich, **Cornel Hațiegan**, Gilbert-Rainer Gillich, *The Influence of the Number of Finite Elements upon the Accuracy of the Results Obtained Using Discrete Models*, Analele Universității "Eftimie Murgu", Fascicula de Inginerie, Anul XX, Nr. 3, Reșița, 2013 (indexată BDI).

20. Gilbert-Rainer Gillich, Zeno-Iosif Praisach, Boboș Daniel, **Hațiegan Cornel**, *Assessment of corrosion damages with important loss of mass and influences on the natural frequencies of bending vibration modes*, Applied Mechanics and Materials, Vol.430, 2013 (indexată ISI).

21. **Hațiegan Cornel**, Suciu Lenuța, *Fizică tehnologică. Teorie și aplicații*. Editura: Universitatea „Eftimie Murgu” Reșița, 2010.

BIBLIOGRAFIE

1. Abramowitz M., Stegun I., *Handbook of mathematical functions* With, National Bureau of Standards, 1972.
2. Altenbach J., Naumenko K., Naumenko V., *Analysis of Rectangular thin Plates and Plate Structures Basing on the Vlasov's Variational Procedure*. CAMES 5 115-128, 1998.
3. Amza Gh., Barb D., Constantinescu F., *Sisteme ultraacustice*, Ed. Tehnică, București, 1988.
4. An H., An W. G. , Zhao W.T., *Reliability analysis of ship structure system with multi-defects*, Science China, Physics, Mechanics & Astronomy, Vol.53 No.11: 2113–2124 doi: 10.1007/s11433-010-4124-9, 2010.
5. Babeu T., *Teoria elementară a rezistenței materialelor*, Ed. Mirton Timișoara, 1998.
6. Bayón A., Gascón F., Medina R., Nieves F.J., Salazar F., *Study of pure transverse motion in free cylinders and plates in flexural vibration by Ritz's method*, European Journal of Mechanics / A Solids, 2010.
7. Benvenuti E., Tralli A., *Simulation of finite-width process zone in concrete-like materials by means of a regularized extended finite element model*, Comput Mech 50:479–497, 2012.
8. Bratu P., *Analiza structurilor elastice. Comportarea la acțiuni statice și dinamice*, Ed. Impuls, București, 2011.
9. Bratu P., *Vibrațiile sistemelor elastice*, Ed. Tehnică, București, 2000.
10. Bratu P., *Structural requirements imposed to vibration systems*, International Journal of Acoustics and Vibration, Vol. 5, Nr.2, 2001.
11. Bratu P., *Vibration of elastic systems*, Technical Publishing House, Bucharest, 2000.
12. Brîndeu L., *Vibrații și vibropercuții. Bazele mecanicii vibrațiilor și vibropercuțiilor*, Ed. Politehnica Timișoara, 2001.
13. Buzdugan Gh., Mihăilescu E., Radeș M., *Măsurarea vibrațiilor*, Ed. Academiei, 1979.
14. Buzdugan Gh., Fetcu L., Radeș M., *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Ed. Academiei, 1975.
15. Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor*, Ed. Tehnică București, 1970.

16. Chen J. C., Garba J. A., *On-Orbit Damage Assessment for Large Space Structures*, AIAA Journal, Vol. 26, No. 9, 1119-1126, 1988.
17. Cheung Y. K., *Finite Strip Method in Structure Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1976.
18. Choi S., Park S., Stubbs N., *Nondestructive damage detection in structures using changes in compliance*, International Journal of Solids and Structures, 2005.
19. Choi S. H., *Development of Nondestructive Damage Detection Algorithms for Plate Structures*, Strength of Materials, Vol. 6, No. 4, pp. 495-501, 2002.
20. Chow C.L., Wang J., *A finite element analysis of continuum damage mechanics for ductile fracture*, International Journal of Fracture 38, 3–16, 1988.
21. Cîndea L., **Hațiegan C.**, Marta C., Roșu M., *Research on the Calculus of the Equivalent Strain of an Elasto-Tactile System for the Monitoring of the Play / Joint during Welding*, Annals of the University “Eftimie Murgu” of Reșița, Anul XVIII, Nr. 3, ISSN 1453 – 7397, 2011.
22. Cornwell. P, Doebling. S. W., Farrar C. R, *Application of the Strain energy damage detection method to plate like structures*, J. of Sound and Vibration 1999.
23. Cowper G. R., Lindberg G. M., Olson M. D., *Shallow shell finite element of triangular shape*, Int. J. Solids Struct., No. 6, 1133–1156, 1970.
24. Czarnota C., Jacques N., Mercier S., Molinari A., *Modelling of dynamic fracture and application to the simulation of plate impact tests on tantalum*, JMech Phys Solids 56:1624–1650, 2008.
25. Eftekhari S. A. , Jafari A. A., *A simple and accurate Ritz formulation for free vibration of thick rectangular and skew plates with general boundary conditions*, Acta Mech 224, 193–209, 2013.
26. Elishakoff I., Sternberg A., *Vibration of Rectangular Plates with Edge-Beams*, Acta Mechanica 36, 195-212, 1980.
27. Elshafey A. A., Marzouk H., Haddara M. R., *Experimental Damage Identification Using Modified Mode Shape Difference*, J. Marine Sci. Appl. 10: 150-155, DOI: 10.1007/s11804-011-1054-5, 2011.
28. Feng G. Q., Li G., Liu Z. H., Niu H. L., Li F. C., *Numerically Simulating the Sandwich Plate System Structures*, J. Marine Sci. Appl. 9: 286-291, 2010.
29. Ferreira A.J.M., Fasshauer G.E., *Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF-pseudospectral method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 196. 134–146, 2006.

30. Ferreira A.J.M., Fasshauer G.E., Batra R.C., Rodrigues J.D., *Static Deformations and Vibration Analysis of Composite and Sandwich Plates Using a Layerwise Theory and RBF-PS Discretizations with Optimal Shape Parameter*, Composite Structures, 86, 328-343, 2008.
31. Foppl A., *Vorlesungen uber technische Mechanik*, vol. 1-2, 14th -15th edns, Verlag R., Oldenburg, Munich, 1944, 1951.
32. Gillich G. R., *Dinamica Mașinilor-Vibrații*, Ed. AGIR, București, 2006.
33. Gillich G.R., Bratu P., Frunzăverde D., Amariei D., Iancu V., *Identifying Mechanical Characteristics of Materials with Non-linear Behavior using Statistical Methods*, Proceedings of the 4th WSEAS international conference on Computer engineering and applications, 2010.
34. Gillich G.R, Frunzăverde D, Praisach Z. I., Minda P. F., *A new method to detect, locate and evaluate the severity of damages using natural frequencies*, Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics, 25-26.05.2011, SISOM 2011.
35. Gillich G. R., Minda P. F., Praisach Z. I., Minda A. A., *Natural Frequencies of Damaged Beams - A New Approach*, Romanian Journal of Acoustics and Vibration ISSN 1584-7284, Volume IX, Issue 2, 2012.
36. Gillich G. R., Praisach Z. I., Negru I., *Damages influence on dynamic behaviour of composite structures reinforced with continuous fibers*, Materiale Plastice 49(3), 2012.
37. Gillich G. R., Praisach Z. I., *Robust method to identify damages in beams based on frequency shift analysis*, Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering 8348 , San Diego, 2012, art. no. 83481D.
38. Gillich G. R., Praisach Z. I., Onchis D.M., *About the effectiveness of damage detection methods based on vibration measurements*, Proceedings of the International Conference on Engineering Mechanics, Structures, Engineering Geology, Corfu, 2010.
39. Gillich G. R., Praisach Z. I., Boboș D., **Hațiegan C.**, *Assessment of corrosion damages with important loss of mass and influences on the natural frequencies of bending vibration modes*, Applied Mechanics and Materials, Vol.430, 2013 (indexată ISI).
40. Glema A., Lodygowski T., Sumelka W., *The Numerical Analysis of the Intrinsic Anisotropic Microdamage Evolution in Elasto-Viscoplastic Solids*, International Journal of Damage Mechanics, 10.1177/1056789508097543, 2009.

41. Gordon G. A., Douglas Mast T., *Wide-Area Imaging of Ultrasonic Lamb Wave Fields by Electronic Speckle Pattern Interferometry*, SPIE, 3586, 297-309, 1999.
42. Gradshteyn I.S., Ryzhik I. M., *Table of integrals, series, and products*, Elsevier, 2007.
43. Grigorenko Ya. M., Shevchenko Yu. N., Vasilenko A. T., et al., *Numerical Methods*, A.S.K., Kiev , 2002.
44. **Hațiegan C.**, *The Ben Daniel-Duke Model Applied to Semiconductor Heterostructure - Part 1*, Annals of the University "Eftimie Murgu" of Reșița, Anul XVI. , Nr. 1, ISSN 1453 – 7397, 2009.
45. **Hațiegan C.**, *The Ben Daniel-Duke Model Applied to Semiconductor Heterostructure - Part 2*, Annals of the University "Eftimie Murgu" of Reșița, Anul XVI. , Nr. 1, ISSN 1453 – 7397, 2009.
46. **Hațiegan C.**, *Properties of the solutions of a system of coupled Schrödinger equations*, Analele Universității de Vest din Timișoara Vol. LIV, Seria Fizică, ISSN: 1224-9718, 2010.
47. **Hațiegan C.**, Nedeloni M. D., Tufoi M., Protocsil C., Răduca M., *Modal Analysis Of Natural Frequencies And Mass Participation Coefficients Of Simply Supported Thin Plates With Damages*, Constanța Maritime University Annals, Anul XIV, Volum 19, ISSN: 1582-3601, Pag. 115-120, 2013.
48. **Hațiegan C.**, Tufoi M., Răduca E., Protocsil C., Mitulețu C., *Modal Analysis Through Solidworks Software Of Clamped Thin Plates With Damages*, Constanța Maritime University Annals, Anul XIV, Volum 19, ISSN: 1582-3601, Pag. 121-124, 2013.
49. **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Gillich N., Tufoi M., Răduca M., *Modal Analysis of Thin Plates with Damage Simply Supported on all Edges*, Annals of the University "Eftimie Murgu" of Reșița, Anul XX. , Nr. 1, ISSN 1453 – 7397, 2013.
50. **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Răduca E., Nedeloni M. D., Cîndea L., *Equation of Motion and Determining the Vibration Mode Shapes of a Rectangular Thin Plate Simply Supported on Contour Using MATLAB*, Annals of the University "Eftimie Murgu" of Reșița, Anul XX. , Nr. 1, ISSN 1453 – 7397, 2013.
51. **Hațiegan C.**, Suciu L., *Fizică tehnologică. Teorie și aplicații*. Editura: Universitatea „Eftimie Murgu“ Reșița, 2010.
52. **Hațiegan C.** , Răduca M., Frunzăverde D. , Răduca E. , Pop N. , Gillich G. R., *The modeling and simulation of the thermal analysis on the hydrogenerator stator*

- winding insulation*, J Therm Anal Calorim, 1572-8943, September 2013, Volume 113, Issue 3, pp 1217-1221 (cotată ISI: 1,982).
53. **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Răduca M., Budai A. M., Muntean F., Răduca E., *Finite Element Analysis Of Natural Frequencies And Mass Participation Coefficients For Thin Plates With Defects*, Scientific Bulletin of “Politehnica” University of Timișoara, vol. 57 (71) 2, ISSN 12246069, 2012.
 54. Hencky H., *Der spannungszustand in rechteckigen platten*, Z Andew Math und Mech, vol. 1, 1921.
 55. Huber M.T., *Probleme der Static Techish Wichtiger Orthotroper Platten*, Warsawa, 1929.
 56. Hibbitt H.D., Marcal P.V., Rice J.R., *A finite element formulation for problems of large strain and large displacement*, International Journal of Solids and Structures 20, 1069–1086, 1970.
 57. Jacques N., Czarnota C., Mercier S., Molinari A. , *A micromechanical constitutive model for dynamic damage and fracture of ductile materials*, Int J Fract 162:159–175, DOI 10.1007/s10704-009-9436-2, 2010.
 58. Jin G.Y., Chen H., Du J.T., Yang T.J., Li W.Y., *The Influence of Edge Restraining Stiffness on the Transverse Vibrations of Rectangular Plate Structures*, J. Marine Sci. Appl. 9: 393-402, DOI: 10.1007/s11804-010-1025-2, 2010.
 59. Jiu H. W., Liu A. Q. și Chen H. L., *Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions*, 2007.
 60. Jubran J.S., Cofer W.F., *Ultimate strength analysis of structural components using the continuum damage mechanics approach*, Computers and Structures 39(6), 741–752, 1991.
 61. Kanel G.I., Razorenov S.V., Bogatch A., Utkin A.V., Grady D.E., *Simulation of spall fracture of aluminium and magnesium over a wide range of load duration and temperature*, Int J Impact Eng 20:467–478, 1997.
 62. Kaouk M., Zimmerman D. C., *Assessment of Damage Affecting All Structural Properties*, in Proc. of the 9th VPI &SU Symposium on Dynamics and Control of Large Structures, 445-455, 1994.
 63. Karman T., *Festigkeitsprobleme in Maschinenbau*, Encycl der Math Wiss, vol. 4, pp. 348–351, 1910.

64. Karman T., Sechler Ef., Donnel L.H., *The strength of thin plates in compression*, Trans ASME, vol. 54, pp. 53–57, 1932.
65. Kolahan F., Esmailzadeh A., Sadeghi M., Mosleh M., *Finite element simulation of post-buckling distortion for thin plate welding positioned by fixture*, World Academy of Science, Engineering and Technology 74, 2011.
66. Kumbetlian G., Mândrescu G., *Rezistența materialelor : Fundamente*, Ed. Fundației "Andrei Șaguna", Constanța, 1998.
67. Kumbetlian G., *Determinarea câmpului de deplasări, momente forțe tăietoare și tensiuni în plăcile groase dreptunghiulare acționate hidrostatic, cu laturile opuse rezemate și încastrate*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, Ed. Acad. Rom., Tom 35, nr.3/1976, ISSN 0035-4074, pag. 363-386.
68. Kumbetlian G., *Exact calculation of the plane rectangular, hydrostatically acted plates, with two opposite edges simply supported and the other rigidly clamped, on the basis of solving antimedial problem of the theory of elastic mobility*, Revue Roumaine des sciences techniques, Serie de mecanique applique, Academie de la Roumanie, Tome 21, no 3/1976, ISSN 0035-4074, pag. 447-462
69. Kumbetlian G., *A general model for the calculation of thick plates (and rods)*, Roumanian Journal of technical sciences, Applied mechanics., Acad. Rom., Tom 23, nr 2/1978, ISSN 0035-4074, pag. 249-262.
70. Kumbetlian G., *Influența grosimii asupra câmpurilor mărimilor fizice ale barelor și plăcilor groase*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, Acad. Rom., Tom 38, nr 1/1979, ISSN 0035-4074, pag. 99-105.
71. Kumbetlian G., Pascale D., *A computer programme for thick anticlastic plates*, Rev. Roum. des sci.techn. Mec. applique., Acad. Roum., Tome 26, nr. 6/1981, ISSN 0035-4074, pag. 899-908.
72. Leissa, A.W., *Vibration of Shells*, NASA SP-288, Washington, DC, 1973.
73. Leissa A.W., *Singularity Considerations in Membrane, Plate and Shell Behaviours*. Int. J. Solids and Structures 98, 3341-3351, 2001.
74. Leissa A. W., *Vibration of Plates*, Ohio State University, Columbus Ohio, 1969.
75. Lin Z., Lingcang C., Yinglei L., Jianxiang P., Fuqian J., Dongquan C. , *Simplified model for prediction of dynamic damage and fracture of ductile materials*, Int J Solids Struct 41:7063–7074, 2004.
76. Magheți I., Savu M., *Teoria și practica vibrațiilor mecanice*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 2007.

77. Matveev V.V., Boginich O.E., *Vibrodiagnostic parameters of fatigue damage in rectangular plates. Part 1. A procedure of determination of damage parameters*, Strength of Materials, Vol. 36, No. 6, 2004.
78. Mănescu T. Șt., Nedelcu D., *Analiza structurală prin metoda elementului finit*, Editura Orizonturi Universitare, ISBN 973-638-217-6, Timișoara, 2005.
79. McMeeking R.M., Rice J.R., *Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation*, International Journal of Solids and Structures 11, 601–616, 1975.
80. Mindlin R. D., *An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2006.
81. Monfared A. H., *Numerical Simulation of Welding Distortion in Thin Plates*, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Vol. 85, No. 1, 2012.
82. Nadai A., *Die formänderungen und die spannungen von rechteckigen elastischen platten*, Forsch a.d. Gebiete d Ingeineurwesens, Berlin, Nos. pp.170- 171,1915.
83. Naumenko K., Altenbach J., Altenbach H., Naumenko V. K., *Closed and approximate analytical solutions for rectangular Mindlin plates*, Acta Mechanica 147, 153-172, 2001.
84. Nicknam A., Hosseini M. H., Bagheri A., *Damage detection and denoising in two-dimensional structures using curvelet transform by wrapping method*, Arch Appl Mech 81:1915–1924, 2011.
85. Nicknam A., Hosseini M. H., *Structural damage localization and evaluation based on modal data via a new evolutionary algorithm*, Arch Appl Mech 82:191–203 DOI 10.1007/s00419-011-0548-6, 2012.
86. Novăcescu F., **Hațiegan C.**, Răduca M., Răduca E., Pop N., Nedeloni M., *A New Method for Testing the No-Load Work of an Electric One-Phase Transformer Using The Graphical Programming*, Scientific Bulletin of “Politehnica” University of Timișoara, vol. 57 (71) 2, ISSN 12246069, 2012.
87. Petru Florin Minda, Claudiu Mirel Iavornic, Gilbert-Rainer Gillich, *The Influence of the Weight Loss upon Natural Frequency Changes in Case of Severe Defects*, Analele Universității "EFTIMIE MURGU", Fascicula de Inginerie, Anul XIX, Nr. 1, Reșița, ISSN 1453 – 7397, 2012.
88. Praisach Z.-I., Minda P.F., Gillich G.-R., Minda A.A., *Relative frequency shift curves fitting using FEM modal analyses*, Proceedings of the 4th WSEAS

- International Conference on Finite Differences - Finite Elements - Finite Volumes - Boundary Elements, Paris, 2011 , pp. 82-87.
89. Zeno-Iosif PRAISACH, Gilbert-Rainer GILLICH, Petru Florin MINDA, Andrea Amalia MINDA, *Robust method to detect and locate damages and assess their severity*, International Conference “Structural integrity of welded structures”, Timisoara, 2011.
 90. Predoi M. V., *Vibrații mecanice. Modele și aplicații în MATLAB*, Ed. Matrix Rom, București, 2011.
 91. Qian L. F., Batra R. C., Chen L. M., *Free and Forced Vibrations of Thick Rectangular Plates by using Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory and Meshless Petrov-Galerkin (MLPG) Method*, Computer Modeling in Engineering and Sciences, 4, 519-534, 2003.
 92. Radeș M., *Vibrații mecanice*, Ed. Printech, București, 2008.
 93. Răduca M., **Hațiegan C.**, Budai A.M., Răduca E., Pop N., *Optimization conditions of stator winding insulation of hydrogenerator* , Volumul Conferinței, ISSN 2067-4147, pp. 316-321, 2012.
 94. Răduca M., Răduca E., **Hațiegan C.**, Ungureanu D., *Fuzzy controller for adjustment of liquid level in the tank*, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, Volume 38(4), Pag. 33-43 ISSN:1223-6934, 2011.
 95. Reissner, E., *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J Appl Mech Trans ASME, vol. 12, pp. A69–A77, 1945.
 96. Ricles J. M., *Nondestructive Structural Damage Detection in Flexible Space Structures Using Vibration Characterization*, NASA report CR-185670, 1991.
 97. Sajfert V., Nicolina P., Duric M., Popov D., **Hațiegan C.**, *About some thermodynamical properties of cylindrical nanorods*, Romanian Reports in Physics, 64, nr. 4, pag. 1019–1027, 1221-1451 43 822, 2012 (cotată ISI: 1,123).
 98. Semie A. G., *Numerical Modelling of Thin Plates using the Finite Element Method*, Addis Ababa University, 2010.
 99. Shin J.G., Nho I.S., Yim S.J. , *A finite element approach to anisotropic damage of ductile materials in large deformations. Part II: Finite element formulation and applications*, International Journal of Fracture 84: 279–295, 1997.
 100. Soedel W., *Vibrations of Shells and Plates*, Marcel Dekker Inc., New York, 2005.

101. Staicu Ș., *Mecanică analitică și vibrații*, Ed. Matrix Rom, București, 1998.
102. Suciu L., Tătucu I., Marta C., Tufoi M., **Hațiegan C.**, *The Stand for Determination of Service Performance in Load of a Welding Transformer Using the LabVIEW Environment*, Annals of the University "Eftimie Murgu" of Reșița, Anul XVII, Nr. 2, ISSN 1453 – 7397, 2010.
103. Suciu L., **Hațiegan C.**, Gillich G.R., Marta C., Nedeloni M., *Research regarding vibration damping in systems with a degree of freedom*, Scientific Bulletin of "Politehnica" University of Timișoara, vol. 57 (71) 1, ISSN 12246069, 2012.
104. Swami Das A. S. J., Chen Y., *Monitoring Crack Growth Through Change Of Modal Parameters*, Journal of Sound and Vibration, 186-2, 214-232, 1994.
105. Thompson, W.T., *Theory of Vibrations and Applications*, Prentice-Hill, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
106. Timoshenko S.P., Gere J. M., *Teoria stabilității elastice*, Editura Tehnică, București, 1967.
107. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1959.
108. Titurus B., Friswell M. I., Starek L., *Damage detection using generic elements: Part II. Damage detection*, Computers and Structures 81, 2287–2299. 2003.
109. Toader M., Luca Gh., Ștefan C., *Mecanica vibrații. Aplicații industriale*, Ed. Politehnica Timișoara, 2003.
110. Tufoi M., **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Protocsil C., Negru I., *Frequency Changes in Thin Rectangular Plates due to Geometrical Discontinuities. Part I: Finite Element Analysis*, Analele Universității "Eftimie Murgu", Fascicula de Inginerie, Anul XX, Nr. 3, Reșița, 2013.
111. Tufoi M., **Hațiegan C.**, Gillich G. R., Vasile O., *Frequency Changes in Thin Rectangular Plates due to Geometrical Discontinuities. Part II: Frequency Shift Interpretation*, Analele Universității "Eftimie Murgu", Fascicula de Inginerie, Anul XX, Nr. 3, Reșița, 2013.
112. Vanlanduit S., Guillaume P., Schoukens J., Parloo E., *Linear and Nonlinear Damage Detection Using a Scanning Laser Vibrometer*, Shock and Vibration, 9, 43-56, 2002.

113. Vasile Iancu, Carla Protocsil, Nicoleta Gillich, **Cornel Hațiegan**, Gilbert-Rainer Gillich – *The Influence of the Number of Finite Elements upon the Accuracy of the Results Obtained Using Discrete Models*, Analele Universității "Eftimie Murgu", Fascicula de Inginerie, Anul XX, Nr. 3, Reșița, 2013 (indexată BDI).
114. Ventsel E., Krauthammer Th., *Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.
115. Vrabie M., *Calculul plăcilor*, Editura Societății Academice „Matei-Teiu-Botez”, Iași, 2011.
116. Wu J. H., Liu A. Q., Chen H. L., *Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions*, Journal of Applied Mechanics, DOI: 10.1115/1.2744043, pp.1247-1251, 2007.
117. Xiao J. R., Batra R. C., Gilhooley D. F., Gillespie J. W., McCarthy. M. A. Jr., *Analysis of Thick Plates by using a Higher-Order Shear and Normal Deformable Plate Theory and MLPG Method with Radial Basis Functions*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 979-987, 2007.
118. Xu X.P., Needleman A. , *Simulations of ductile failure with two size scales of voids*, Eur J Mech Solid 10:459–484, 1991.
119. Zhang Y. M., Sun H. C., Yang J. X., *Equivalent boundary integral equations with indirect unknowns for thin elastic plate bending theory*, Applied Mathematics and Mechanics, Vol 21, No 11, Article ID : 0253-4827 11-1246-10, 2000.
120. Zhou D., Ji T., *Free vibration of rectangular plates with continuously distributed spring-mass*, Int J Solids Struct, 2006.
121. Zhu H.P., He B., Chen X. Q., *Detection of Structural Damage Through Changes in Frequency*, Wuhan University Journal of Natural Sciences, Vol. 10 No. 6, ISSN: 1069-1073, 2005.
122. Zimmerman, D.C., Kaouk, M., *Eigenstructure Assignment Approach for Structural Damage Detection*, AIAA Journal, Vol. 30, No. 7, 1848-1855, 1992.
123. Zimmerman D. C., Kaouk M., Simmermacher T., *Structural Damage Detection Using Frequency Response Functions*, in Proc. of the 13th International Modal Analysis Conf., 179-184, 1995..